collection Textes de référence – Lycée [LEGT]
Documents d'accompagnement des programmes

Mathématiques

cycle terminal de sciences et technologie de la gestion

Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche
Direction de l'enseignement scolaire

Centre national de documentation pédagogique

Ce document a été rédigé sous la direction de André GRAMAIN, professeur des universités, par le groupe de travail composé des membres suivants :

Rémy JOST	inspecteur général de l'Éducation nationale
Jacques BENAÏEM	professeur de sciences économiques au lycée Maximilien-Sorre, Cachan (94)
Patrick FERRAND	IA-IPR de mathématiques de l'académie de Grenoble
Gérard SANTINO	professeur de mathématiques au lycée Dessaignes, Blois (41)
Élisabeth OTTENWAELTER	professeure de mathématiques à l'IUT de Paris V, Paris (75)
Louis-Marie BONNEVAL	professeur de mathématiques au lycée Victor-Hugo, Poitiers (86)
Isabelle BRUN	professeure de mathématiques au lycée Parc-de-Vilgénis, Massy (91)

Coordination : Véronique Fouquat, bureau du contenu des enseignements, direction de l'enseignement scolaire.

Suivi éditorial : Corinne Paradas
Secrétariat d'édition : Nelly Bernard et Nicolas Gouny
Mise en pages : Atelier Michel Ganne

Téléport 1@4, BP 80158, 86961 Futuroscope cedex
ISBN : 2-240-02214-0
ISSN : 1778-2767

Sommaire

Avant-propos

Les nouveaux programmes ont été publiés au *Bulletin officiel de l'Éducation nationale*, hors-série n° 5 du 9 septembre 2004 pour les classes de première et au *Bulletin officiel de l'Éducation nationale*, hors-série n° 7 du 1er septembre 2005 pour les spécialités des classes terminales. Ils sont applicables à la rentrée 2005 pour les classes de première, à la rentrée 2006 pour les classes terminales.

Les objectifs et les modalités de mise en œuvre de ces programmes sont clairement définis en introduction aux programmes officiels et à chacun des grands chapitres de ces programmes. Retenons, parmi ces objectifs, deux points marquants :
– l'utilisation de moyens informatiques (calculatrice et tableur) pour traiter des données mais aussi pour illustrer et même pour introduire les concepts (fonctions, extremums, nombre dérivé) ;
– la référence à divers domaines des sciences humaines pour donner un support à l'exploitation des concepts et des outils mathématiques.

Le présent document d'accompagnement se propose, d'une part, de préciser, notamment par des exemples, les objectifs et les contours des programmes, et, d'autre part, de donner aux professeurs des éléments qui leur permettent « d'exploiter largement des situations issues des domaines du commerce, de la gestion, des sciences économiques et de l'administration ».
Il est organisé en trois parties correspondant aux trois grands chapitres des programmes (information chiffrée et suites numériques, statistiques et probabilités, fonctions numériques et applications), suivies d'une bibliographie. Chaque partie présente deux volets :
– une analyse du programme ;
– des approfondissements pour le professeur.

Pour répondre aux deux objectifs cités plus haut, nous nous sommes attachés aux points suivants :
– préciser les concepts et la terminologie des disciplines des sciences humaines étudiées par les élèves ;
– montrer que les situations issues des sciences humaines peuvent amener à des questions d'un intérêt mathématique certain ;
– donner des exemples de l'utilisation de feuilles de calcul pour aborder, illustrer ou résoudre un problème concret. Des feuilles de calcul actives sont disponibles sur le site du SCÉRÉN (www.sceren.fr).

Nous espérons que ce document répondra aux attentes souvent exprimées par les professeurs, mais nous rappelons aussi qu'un document d'accompagnement n'est pas un manuel officiel. Il est destiné aux professeurs et non aux élèves. Les exercices et activités proposés sont des pistes ou des illustrations en vue de la préparation de l'enseignement, mais en aucun cas une banque d'exercices pour les classes ni un répertoire de sujets modèles d'examen.

Information chiffrée et suites numériques

Commentaires sur le programme

Les trois premiers chapitres de cette partie du programme peuvent être interprétés comme les étapes du passage du « statique » au « dynamique » : le premier chapitre traite des proportions (notion statique), le deuxième des taux d'évolution (passage d'un état à un autre), le troisième des suites (succession de plusieurs états).

Classe de première

Le langage courant et les médias utilisent le mot pourcentage avec des sens divers, ce qui entraîne bien souvent confusions et incompréhensions chez les élèves et beaucoup d'adultes.

Il suffit pour s'en convaincre de comparer les phrases suivantes :

– Le pourcentage de filles est 25 % dans le lycée.

– Le nombre de filles a augmenté de 25 %.

– Le pourcentage de filles a augmenté de 25 %.

– Le pourcentage de filles a augmenté de 25 points.

En soi, le pourcentage n'est rien d'autre qu'une façon d'écrire les nombres décimaux ($z\,\% = \frac{z}{100}$). On l'utilise couramment pour écrire les fréquences et les taux d'évolution[1]. Mais ce sont les propriétés des fréquences et des taux d'évolution qui doivent être explicitées. Traiter ensemble ces deux notions très différentes, sous prétexte qu'elles s'écrivent sous forme de pourcentage, conduit à des acrobaties de langage qui ne font qu'entretenir la confusion. C'est pourquoi le programme a nettement séparé les deux sous-chapitres « fréquences » et « taux d'évolution ».

Fréquence (ou proportion)

La fréquence de A dans E peut éventuellement se noter $f_E(A)$, ce qui préparera la notation des fréquences conditionnelles et des probabilités.

Elle a des propriétés simples, notamment :

a) Si p est la proportion de A dans E et p' la proportion de B dans E, et si A et B sont disjoints, alors $p + p'$ est la proportion de $(A \cup B)$ dans E.

b) Si p est la proportion de A dans E et p' la proportion de E dans F, alors pp' est la proportion de A dans F.

On note que ces deux propriétés n'ont rien à voir avec les pourcentages : elles restent vraies si p et p' sont écrits sous forme décimale ou fractionnaire. Un usage tenace consiste pourtant à les appeler respectivement « addition de pourcentages » et « pourcentage de pourcentage ».

La propriété (a) admet deux extensions :

– d'une part, elle s'étend à un nombre quelconque de sous-populations deux à deux disjointes. Notamment dans le cas d'une partition, elle conduit à $\sum f_i = 1$, propriété observée en statistiques ;

– d'autre part, elle permet d'établir que, dans tous les cas,
$f_E(A \cup B) = f_E(A) + f_E(B) - f_E(A \cap B)$: propriété plus précise que la simple remarque « si les sous-populations ne sont pas disjointes, les proportions ne s'ajoutent pas ».

1. Et bien d'autres choses, notamment les multiples ratios de l'analyse économique (part de budget, taux d'épargne, taux d'autofinancement, taux d'imposition, taux de couverture des importations par les exportations…) ou encore les probabilités.

Pour la démontrer, on peut bien entendu s'appuyer sur des schémas, et décomposer en réunion des trois ensembles disjoints $A \cap \overline{B}$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$.
La propriété (b) trouve un champ d'application important dans la notion de fréquence conditionnelle, qu'on retrouve en statistiques.

Exemple

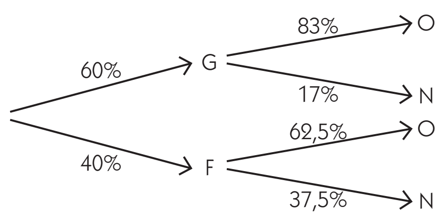
Le tableau ci-dessous indique les réponses de 40 jeunes à la question : « Regardez-vous le foot à la télévision ? »

	Oui	Non	Total
Garçons	20	4	24
Filles	10	6	16
Total	30	10	40

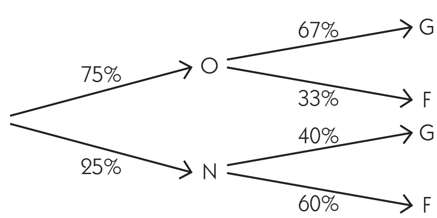
Pour savoir si la réponse dépend du sexe de la personne interrogée, il faut analyser ce tableau.
On obtient les fréquences conjointes et les fréquences marginales en divisant tous les effectifs par l'effectif total 40 :

	Oui	Non	Total
Garçons	0,5	0,1	0,6
Filles	0,25	0,15	0,4
Total	0,75	0,25	1

Les fréquences marginales apparaissent au premier niveau des arbres de répartition ci-dessous.
Une lecture en ligne permet d'obtenir les fréquences conditionnées selon le sexe, qui apparaissent au deuxième niveau de l'arbre 1 ci-dessous.
Elles permettent d'observer la surreprésentation des OUI parmi les garçons, la sous-représentation des OUI parmi les filles.



Une lecture en colonne permet d'obtenir les fréquences conditionnées par la réponse, qui apparaissent au deuxième niveau de l'arbre 2 ci-dessous.
Elles permettent d'observer la surreprésentation des garçons parmi les OUI, la sous-représentation des filles parmi les OUI.



Ce langage (fréquences conjointes, marginales, conditionnelles) n'est pas exigible des élèves. En revanche, il importe qu'ils sachent faire la distinction entre la proportion de filles parmi les OUI et la proportion de OUI parmi les filles. Les arbres ci-dessus peuvent aider à cette compréhension.
La propriété (b) permet par exemple de retrouver la fréquence conjointe des filles ayant répondu NON en multipliant 0,375 par 0,4, ou bien en multipliant 0,6 par 0,25.
Ce travail autour des propriétés (a) et (b), des notations ensemblistes et des arbres, sera bien entendu réinvesti en probabilités.

Taux d'évolution (ou variation relative)

Les économistes l'appellent souvent taux de croissance, ce qui peut déconcerter dans le cas où sa valeur est négative[2]. L'expression variation relative qui désigne $\frac{y_2 - y_1}{y_1}$ vise à la distinguer de la variation absolue $y_2 - y_1$.
Dans cette définition, y_1 et y_2 sont deux nombres réels strictement positifs[3] : en pratique ce sont deux valeurs successives d'une même grandeur, mesurées avec la même unité. Par suite, la variation relative est sans unité, contrairement à la variation absolue. Par exemple, la variation relative est la même pour une masse passant de 20 g à 25 g et pour une masse passant de 20 kg à 25 kg.
Qu'elle soit relative ou absolue, une variation positive est une augmentation (ou hausse) ; une variation négative est une diminution (ou baisse), par exemple :
– un taux d'évolution 0,2 est une augmentation relative de 20 % ;
– un taux d'évolution – 0,2 est une baisse relative de 20 %.
Mais parfois, d'autres expressions sont employées : le salaire des cadres dépasse de 60 % (ou est supérieur de 60 % à) celui des employés…
Une variation relative peut s'exprimer sous forme décimale, de fraction ou de pourcentage. Mais par convention, une variation exprimée en pourcentage est toujours une variation relative.
Cette convention universelle a entraîné un glissement de sens du mot « pourcentage » : on dit couramment « pourcentage d'augmentation » pour désigner une augmentation relative exprimée en pourcentage. Elle a aussi engendré des pièges :
– « Si on augmente de 5 m le côté d'un carré, son aire augmente de 10 % » : la première expression « augmente de » renvoie à une augmentation absolue, alors que la deuxième renvoie à une augmentation relative !
– « La cote de popularité du président passe de 40 % à 50 % : quel est le pourcentage de hausse ? » S'il s'agit de hausse relative, la réponse est 25 %. S'il s'agit de hausse absolue, la réponse est 10 %, mais cette deuxième réponse contredirait la convention ci-dessus, on parlera donc d'une hausse de 10 points.
Le taux d'évolution a une propriété essentielle, qui découle immédiatement de la définition : dire que t est le taux d'évolution entre y_1 et y_2 équivaut à dire que $y_2 = y_1(1 + t)$. Autrement dit $\frac{y_2}{y_1} = 1 + t$. Il est commode d'appeler ce nombre $1 + t$ « coefficient multiplicateur », ou plus simplement « multiplicateur », et de s'habituer à l'utiliser systématiquement. Il est en effet très efficace pour étudier les évolutions successives et les évolutions réciproques, permettant notamment de démontrer que :
– si t est le taux d'évolution de y_1 à y_2 et t' le taux d'évolution de y_2 à y_3, alors le taux d'évolution de y_1 à y_3 est $(1 + t)(1 + t') - 1$;
– si t est le taux d'évolution de y_1 à y_2, alors le taux d'évolution de y_2 à y_1 est $\frac{1}{1+t} - 1$.
On note à nouveau que ces propriétés n'ont rien à voir avec les pourcentages : elles restent vraies si t et t' sont écrits sous forme décimale ou fractionnaire. Il est pourtant usuel de parler de « pourcentages successifs » et de « pourcentage réciproque ».
D'ailleurs, dans certains cas, le langage des fractions peut être plus évocateur que celui des pourcentages : par exemple, pour compenser une augmentation de moitié, il faut une diminution d'un tiers.
Il est souhaitable qu'un travail commun entre le professeur de mathématiques et le professeur de STE sécurise les élèves par l'harmonisation du langage et des méthodes.
Un travail très utile est de débusquer l'implicite dans les expressions courantes :
– une augmentation de 10 % est une augmentation relative ;

---

2. Ils utilisent aussi l'expression « taux de variation » utilisée en mathématiques pour désigner $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
Cette tradition mathématique n'est d'ailleurs pas très heureuse, le mot « taux » étant dans tous ses autres usages réservé à un rapport de grandeurs de même nature (donc « sans dimension »).

3. On pourrait être tenté de l'étendre à des valeurs négatives, par exemple pour traduire l'évolution d'un bilan qui passe de 1 000 à – 200. Mais on rencontrerait alors des difficultés : la variation relative pourrait ne plus avoir le même signe que la variation absolue, ce qui fait qu'une augmentation absolue pourrait se traduire par une diminution relative.

– une augmentation de 0,1 est une augmentation absolue ;
– une augmentation d'un dixième peut être absolue ou relative selon le contexte…
Une phrase comme la suivante mérite un travail de décryptage : « Aujourd'hui, l'écart moyen de rémunération entre les sexes reste de 25 %, alors que les femmes représentent 45 % de la population active. Par ailleurs, 80 % des smicards sont des femmes et le taux de chômage féminin est environ de deux points supérieur à celui des hommes. »[4]
La première affirmation notamment est ambiguë : veut-on dire que la rémunération des hommes est supérieure de 25 % à celle des femmes ou bien que celle des femmes est inférieure de 25 % à celle des hommes ? Les deux assertions ne sont pas équivalentes.

Suites arithmétiques et géométriques

La définition des suites arithmétiques et géométriques donnée dans le programme n'impose pas le mode d'introduction : il est tout à fait possible de donner une définition du type « Dire qu'une suite de nombres est arithmétique signifie qu'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre » puis de demander aux élèves de traduire cette définition par une formule. Cette traduction n'a rien d'immédiat pour des élèves qui, découvrant la notation u_n, ont tendance à confondre u_{n+1} et $u_n + 1$.
C'est l'une des raisons pour lesquelles le programme demande de citer la notation $u(n)$. Il y a deux autres raisons : c'est la notation utilisée par les calculatrices ; elle montre que les suites sont un cas particulier de fonctions.
Pour désigner une suite de nombres, on disposera donc de deux notations : (u_n) qui condense l'écriture $(u_\mathrm{o}, u_1, u_2…)$ ou u, plus simple mais plus abstraite.
Le premier objectif est de savoir reconnaître, dans une situation donnée, si l'on a affaire à une suite arithmétique, géométrique ou d'une autre nature. En particulier, les élèves doivent savoir que si la variation absolue est constante, il s'agit d'une suite arithmétique ; et que si la variation relative est constante, il s'agit d'une suite géométrique (dont la raison est non pas le taux, mais le multiplicateur).
Le passage de la formule d'itération à la formule explicite pose le problème du premier terme : est-il de rang 0 ou de rang 1 ? Cela dépend de la situation étudiée : s'il s'agit de placer un capital à intérêts simples ou composés, il est commode d'appeler n la durée du placement, et donc C_o le capital initial ; mais si on effectue des versements à date fixe à une compagnie d'assurance, il est naturel d'appeler n le numéro du versement, et donc de noter le premier v_1.
Il y a donc deux formules utiles pour chaque type de suite. L'essentiel est de faire comprendre que pour passer de u_o à u_n, on effectue n fois la même opération (addition ou multiplication) ; alors que pour passer de u_1 à u_n on l'effectue $n - 1$ fois. On peut pour cela s'aider de tableaux du type suivant :

Nombre d'années n	Capital C_n	
0	1 000	
1		↓ + 50
2		↓ + 50
3		↓ + 50
4		↓ + 50

Nombre d'années n	Capital C_n	
0	1 000	
1		↓ × 1,05
2		↓ × 1,05
3		↓ × 1,05
4		↓ × 1,05

L'utilisation de la calculatrice ou du tableur est ici très utile ; il est en particulier formateur de comparer sur tableur la formule d'itération et la formule explicite.
La représentation graphique des suites pose la question : faut-il relier les points ? Cette question peut être soumise aux élèves et le professeur leur fera découvrir que la réponse est négative[5], pour deux raisons :

4. *Le Nouvel Observateur*, 8 mars 2004.
5. On peut les relier à l'axe des abscisses pour réaliser un diagramme en bâtons, mais il doit être clair qu'il s'agit simplement de faciliter la lecture (les points du « bâton » n'ont pas de signification).

– les nombres réels autres que les entiers naturels n'ont pas d'image ;
– il y a une infinité de fonctions interpolant une suite donnée.
Ce problème de l'interpolation[6] est d'ailleurs une question importante dans les sciences appliquées : elle sera abordée modestement en terminale avec l'ajustement affine.
Pour une suite arithmétique, il est intéressant de constater et de faire démontrer que les points sont alignés ; autrement dit, qu'il existe une fonction affine qui interpole la suite.
Pour une suite géométrique (a^n), ce n'est bien entendu pas le cas : on verra en terminale la fonction exponentielle $x \mapsto a^x$, qui permet l'interpolation la plus simple.

Feuilles automatisées de calcul

Pour ne pas multiplier les chapitres, ce paragraphe a été rattaché à l'information chiffrée. Mais son libellé indique bien que l'utilisation du tableur concerne aussi bien les suites (voir ci-dessus) que les statistiques et les fonctions.
Les élèves de première STG sont en principe familiarisés avec cet outil en communication et en gestion.
L'édition d'une formule, la copie d'une formule, l'utilisation d'un adressage absolu ou relatif, la dénomination de cellules, la réalisation d'un graphique sont les compétences de base à développer ou à consolider dans le cadre d'activités de résolution de problèmes.
Les « formules élémentaires » et les « fonctions élémentaires » évoquées dans la colonne des capacités attendues sont celles qui permettent :
– de définir les fonctions de référence, les fonctions trinômes de degré 2, les fonctions homographiques ;
– de calculer les termes de suites arithmétiques ou géométriques (formules d'itération, formules explicites) ;
– d'étudier des séries statistiques (calculs de fréquences, de moyenne, de médiane, de déciles, de quartiles, d'écart type, de maximum, de minimum, etc.) ;
– d'effectuer des simulations (tirage aléatoire, partie entière, condition du type « si… alors », dénombrement conditionnel, etc.).
On veillera à ce que les séances de travail sur tableur donnent lieu à une production écrite, faute de quoi l'expérience montre que les méthodes ne sont pas mémorisées.
Il importe également qu'elles suscitent des questions ciblées lors des évaluations.

Classe terminale

Taux d'évolution

Taux d'évolution moyen, moyenne géométrique
Les élèves ont (re)vu en classe de première comment calculer le taux global T correspondant à deux évolutions successives à des taux t_1 et t_2 : le multiplicateur global $1 + T$ est le produit des multiplicateurs $1 + t_1$ et $1 + t_2$.
Le taux d'évolution moyen est par définition le taux unique t qui, répété deux fois, fournirait le même taux global T. Donc $(1+t)^2 = 1+T$, d'où $1+t = \sqrt{(1+t_1)(1+t_2)}$. Le multiplicateur $1 + t$ apparaît comme la moyenne géométrique des deux multiplicateurs $1 + t_1$ et $1 + t_2$.
Rappelons l'origine de l'expression « moyenne géométrique ». Étant donnés deux nombres positifs distincts a et b, on attribue aux pythagoriciens la distinction de trois façons d'intercaler entre eux une valeur moyenne c (médiétée), c'est-à-dire une valeur intermédiaire :
– la façon arithmétique : dans la suite des nombres entiers naturels (*arithmos* en grec), chaque terme est la demi-somme des deux termes qui l'encadrent ; d'où le nom de moyenne arithmétique pour la demi-somme ;
– la façon géométrique : le nombre c est donné par la construction géométrique ci-contre ; il est tel que $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$, c'est pourquoi on l'appelle aussi moyenne proportionnelle ;
– la façon harmonique, qui se réfère à la suite des inverses des entiers naturels, suite qui intervient dans les intervalles musicaux, ce qui explique son nom.

6. Les mots « interpolation » et « extrapolation » ne sont pas au programme. On peut parler de courbe passant par des points donnés.

La définition du taux moyen s'étend à n évolutions successives : $1 + T = (1 + t_1)(1 + t_2)\ldots(1 + t_n)$. Le taux d'évolution moyen est le taux unique t qui, répété n fois fournirait le même taux global T. Donc $(1 + t)^n = 1 + T$, d'où $1 + t = (1 + T)^{1/n}$. Le multiplicateur $1 + t$ apparaît comme la moyenne géométrique des n multiplicateurs $1 + t_i$.
On peut traiter la moyenne géométrique en début d'année dans le cas où $n = 2$, puis la reprendre en fin d'année dans le cas général quand on dispose des exposants non entiers.

Indice simple en base 100
La définition ne pose pas de difficulté, sinon de comprendre qu'un indice traduit une évolution par rapport à une quantité de référence : se donner l'indice équivaut à se donner le multiplicateur, donc le taux d'évolution.
Le plus difficile réside dans le décryptage des articles de journaux, souvent rédigés de façon obscure. Si, par exemple, on étudie l'évolution de la consommation de pétrole en France depuis 1973, il est courant de lire « 1973 = 100 » : il faut comprendre que la référence est la quantité de pétrole consommée en 1973. Ce travail d'explication a tout avantage à être mené en liaison avec le professeur d'économie.

Petits taux d'évolution
– Le nombre dérivé en 1 de la fonction « carré » est 2, ce qui fournit une formule d'approximation locale $(1+t)^2 \approx 1+2t$ pour t proche de 0. Cette formule a une application aux petits taux d'évolution : augmenter deux fois de suite de 1 % revient sensiblement à augmenter de 2 %.
– Le nombre dérivé en 1 de la fonction « inverse » est – 1, ce qui permet d'écrire $\frac{1}{1+t} \approx 1-t$ pour t proche de 0 : on peut en déduire par exemple que le taux réciproque de 1 % est sensiblement – 1 %.
– Le nombre dérivé en 1 de la fonction « racine carrée » est – 1, ce qui permet d'écrire $\sqrt{1+t} \approx 1+\frac{1}{2}t$ pour t proche de 0. On peut en déduire par exemple que si après deux variations relatives identiques le taux global est 4 %, c'est que chaque variation relative était sensiblement de 2 %.
Sur chaque exemple numérique, il est essentiel de comparer la valeur exacte et des valeurs approchées de différents niveaux de précision. Dans le premier cas on peut même le faire de façon littérale en développant $(1 + t)^2$.
Ces illustrations du nombre dérivé, qui mettent en œuvre trois fonctions de référence, établissent un lien entre la partie « Information chiffrée » et la partie « Fonctions numériques ».

Suites arithmétiques et géométriques

Disposer de la notion de moyenne géométrique permet d'expliquer les expressions « suite arithmétique » et « suite géométrique » :
– dans une suite arithmétique, chaque terme est la moyenne arithmétique des deux termes qui l'encadrent ;
– dans une suite géométrique, chaque terme est la moyenne géométrique des deux termes qui l'encadrent.

Somme de termes consécutifs
La sommation des termes consécutifs d'une suite géométrique est indispensable en mathématiques financières (actualisation d'une suite d'annuités constantes, emprunts à annuités constantes).
La difficulté principale réside dans la numérotation des termes : on peut soit additionner les n termes u_0 à u_{n-1} , soit les n termes de u_1 à u_n, soit les $n + 1$ termes de u_0 à u_n.
C'est pourquoi il peut être commode d'énoncer :
– Pour une suite arithmétique, la somme de plusieurs termes consécutifs est le produit du nombre de termes par la demi-somme du premier et du dernier.
– Pour une suite géométrique de raison b différente de 1, la somme de n termes consécutifs est le produit du premier terme par $\frac{b^n-1}{b-1}$.

On peut observer que cette dernière formule n'est autre qu'une identité polynomiale : $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$.
Il est souhaitable, avant de démontrer ces théorèmes, de traiter des exemples sur tableur.

Sens de variation et limite d'une suite géométrique (de premier terme positif et de raison positive *a*)
On a vu en classe de première comment utiliser le tableur ou la calculatrice pour déterminer le premier terme franchissant un seuil donné. Après avoir traité la fonction logarithme népérien, on peut résoudre explicitement l'inéquation correspondante.
On peut alors conjecturer sur des exemples, puis démontrer, que :
– si $a > 1$, on peut rendre u_n aussi grand qu'on veut en prenant n suffisamment grand.
En effet $u_0 a^n > k$ équivaut à $n > \dfrac{\ln(k) - \ln(u_0)}{\ln(a)}$. On dit que la suite tend vers $+\infty$;
– si $0 < a < 1$, on peut rendre u_n aussi petit qu'on veut en prenant n suffisamment grand.
En effet $u_0 a^n < k$ équivaut à $n > \dfrac{\ln(k) - \ln(u_0)}{\ln(a)}$. On dit que la suite tend vers 0.
Dans le cas d'une raison a comprise entre 0 et 1, on peut en déduire (sur des exemples numériques et sans donner la définition de la convergence vers un nombre réel) que $1 + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots = \dfrac{1}{1-a}$.
On peut souligner à cette occasion ce paradoxe apparent : la somme d'une infinité de termes peut avoir une valeur finie.

Optimisation à deux variables

Les équations de droite sont abordées sous la forme $ax + by = c$, utile dans les problèmes de programmation linéaire (droite de niveau c). Le lien avec les équations $y = mx + p$ ou $x = k$ rencontrées les années précédentes doit être souligné. Le programme vise une bonne maîtrise de la résolution graphique d'un système d'inéquations linéaires, mais aussi de la caractérisation d'une région polygonale convexe donnée par un système d'inéquations linéaires.
Dans le cas d'une recherche de solutions entières, le tableur permet soit le calcul effectif des valeurs d'une expression du type $ax + by$ et la traduction des contraintes à l'aide l'instruction conditionnelle « si… alors », soit la recherche de l'extremum à l'aide d'un solveur. Seule, l'utilisation d'un solveur sera reprise ultérieurement en économie gestion. En classe terminale, les trois approches « résolution graphique », « programmation d'une feuille de calcul » et « usage d'un solveur » se complètent.

Feuilles automatisées de calcul

Le programme ne comprend pas de compétences attendues nouvelles en classe terminale. L'objectif sera d'entretenir par une pratique régulière les acquis de la classe de première. Si l'ensemble du programme offre la possibilité d'utiliser des feuilles de calcul, il est indéniable que les tableurs ont été conçus pour exécuter des calculs financiers. Ils permettent de calculer facilement l'amortissement d'un emprunt et de résoudre des problèmes de programmation linéaire.

Approfondissements pour le professeur

Valeur acquise

La valeur acquise par un capital placé à intérêts composés est la somme disponible à l'issue du placement. Elle se calcule directement à l'aide de suites géométriques. Par exemple, dans le cas du problème suivant :
« Quelle est la valeur acquise par un capital de 2 500 € placé à intérêts composés pendant 6 ans au taux annuel de 5 % ? », la suite des valeurs acquises à la fin de chacune des années successives du placement est une suite géométrique de premier terme 2 500 et de raison 1,05 et l'on obtient :
$C_0 = 2\,500$,
$C_1 = 2\,500 \times 1{,}05$,
$C_6 = 2\,500 \times 1{,}05^6$, soit $C_6 \approx 3\,350{,}24$.

Il peut être le support à un travail sur tableur. En effet, l'usage d'un tableur soulève rapidement le problème de l'automatisation du calcul de la valeur acquise en fonction du capital initial, de la durée du placement et du taux d'intérêt.

Exemples

1. Réaliser à l'aide d'un tableur une feuille qui calcule la valeur acquise par un capital placé à intérêts composés. La feuille permettra le changement du capital, du taux d'intérêt et de la durée du placement en années.

La feuille de calcul ci-dessous donne le résultat cherché dans la cellule E6 par la formule =E4*(1+E2)^E3.

La programmation nécessite la connaissance de $C_n = C_0 \times (1 + i)^n$. Elle ne fait appel qu'à des adressages relatifs.

1	**Valeur acquise par un capital placé à intérêts composés**				
2		i : Taux d'intérêt annuel		0,05	
3		n : Durée, en années, du placement		6	
4		C_0 : Capital initial, en euros		2500	
5					
6		**Valeur acquise :**		**3350,24**	
7					

2. Réaliser à l'aide d'un tableur une feuille qui calcule la valeur acquise par un capital placé à intérêts composés. La feuille permettra le changement du capital et de visualiser l'évolution de la valeur acquise en fonction du taux d'intérêt et de la durée du placement en années.

La feuille ci-dessous donne les valeurs acquises par un capital quelconque en fonction de la durée du placement (colonne A) et du taux annuel (ligne 5). La formule utilisée en F11 est =$G$3*(1+F$5)^$A11.

La programmation nécessite la connaissance de $C_n = C_0 \times (1 + i)^{-n}$. Elle fait appel à des adressages absolus et relatifs. Il peut être intéressant de faire construire d'autres feuilles de calculs avec différents pas de taux d'intérêt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Tableau : Valeur acquise par un capital C_0 placé à intérêts composés $C_0 \times (1+i)^n$**										
2		i : Taux d'intérêt annuel									
3		n : Durée, en années, du placement				C_0 =	2500,00				
4											
5	**n \ i**	**1%**	**2%**	**3%**	**4%**	**5%**	**6%**	**7%**	**8%**	**9%**	**10%**
6	**1**	2525,00	2550,00	2575,00	2600,00	2625,00	2650,00	2675,00	2700,00	2725,00	2750,00
7	**2**	2550,25	2601,00	2652,25	2704,00	2756,25	2809,00	2862,25	2916,00	2970,25	3025,00
8	**3**	2575,75	2653,02	2731,82	2812,16	2894,06	2977,54	3062,61	3149,28	3237,57	3327,50
9	**4**	2601,51	2706,08	2813,77	2924,65	3038,77	3156,19	3276,99	3401,22	3528,95	3660,25
10	**5**	2627,53	2760,20	2898,19	3041,63	3190,70	3345,56	3506,38	3673,32	3846,56	4026,28
11	**6**	2653,80	2815,41	2985,13	3163,30	3350,24	3546,30	3751,83	3967,19	4192,75	4428,90
12	**7**	2680,34	2871,71	3074,68	3289,83	3517,75	3759,08	4014,45	4284,56	4570,10	4871,79

Actualisation

Indépendamment de l'érosion monétaire, si on a le choix entre recevoir 1 000 € tout de suite ou 1 000 € dans un an, on préfère les recevoir tout de suite. Inversement, si on doit donner 1 000 € tout de suite ou 1 000 € dans un an, on préfère les donner dans un an. Ces exemples montrent qu'une même somme n'a pas la même valeur selon la date de considération.

Pour pouvoir comparer deux sommes d'argent à des dates différentes, il est nécessaire de les convertir en valeurs équivalentes à une même date. C'est ce qu'on appelle actualiser.

La méthode usuelle consiste à se donner un taux d'intérêt annuel t, dit taux d'actualisation, et d'imaginer qu'on place à ce taux la somme S considérée : dans un an, elle vaudra $S(1 + t)$:

Au taux d'actualisation annuel t, la somme S aujourd'hui équivaut à la somme $S(1 + t)$ dans un an.

Par conséquent, une somme S' dans un an équivaut à une somme $\frac{S'}{1+t}$ aujourd'hui.

Par exemple, au taux annuel de 5 %, 1 000 € aujourd'hui sont équivalents à 1 050 € dans un an ; et 1 000 € dans un an sont équivalents à $\frac{1000}{1,05} \approx 952,38$ € aujourd'hui. Dans les deux cas, la différence correspond au loyer de l'argent.

Notons que le taux d'actualisation doit faire l'objet d'un accord entre le prêteur et l'emprunteur. Les taux les plus couramment admis sont les taux de l'argent à faible risque, c'est-à-dire celui du marché des obligations sur le long terme (au-delà de dix ans). À titre d'information, il était d'environ 4,5 % sur la zone économique de l'euro en décembre 2004.

Dans la réalité, l'érosion monétaire se superpose au loyer de l'argent. C'est la notion d'érosion monétaire qui est associée à la perte de pouvoir d'achat.

Exemples

1. Réaliser à l'aide d'un tableur une feuille qui calcule la valeur actuelle d'un capital disponible dans un nombre entier d'années. La feuille permettra le changement du capital, du taux d'actualisation et du nombre d'années précédant la disponibilité du capital.

Application : Quelle est la valeur actuelle au taux d'actualisation de 5 % d'un capital C_6= 2 500 € disponible dans 6 ans ?

La feuille de calcul ci-dessous donne le résultat cherché dans la cellule E6 par la formule =E4*(1+E2)^E3.

La programmation nécessite la connaissance de $C_0 = C_n(1+i)^{-n}$. Elle ne fait appel qu'à des adressages relatifs.

	A	B	C	D	E	F
1	**Valeur actuelle d'un capital C_n payable au bout de n années**					
2	i : Taux d'actualisation				0,05	
3	n : Nombre d'années précédant la disponibilité du capital				6	
4	C_n : Capital à actualiser				2500	
5						
6		**Valeur actuelle :**			1865,54	€

2. Réaliser à l'aide d'un tableur une feuille qui calcule la valeur actuelle d'un capital disponible dans un nombre entier d'années. La feuille permettra le changement du capital et de visualiser l'évolution de la valeur actuelle en fonction du taux d'actualisation et du nombre d'années précédant la disponibilité du capital.

La feuille qui suit donne les valeurs actuelles d'un capital quelconque en fonction du nombre d'années précédant sa disponibilité (colonne A) et du taux d'actualisation (ligne 5).

La formule utilisée en F11 est =$G$3*(1+F$5)^–$A11. La valeur actuelle d'un capital de 2 500 € au taux d'actualisation de 5 % est 1 865,54 €.

La programmation nécessite la connaissance de $C_0 = C_n(1+i)^{-n}$. Elle fait appel à des adressages absolus et relatifs. Il peut être intéressant de faire construire d'autres feuilles de calculs avec différents pas de taux d'intérêts, dans un intervalle comprenant des taux d'actualisation régulièrement pratiqués.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Tableau : Valeur actuelle d'un capital C_n payable au bout de n années : $C_n \times (1+i)^{-n}$**										
2		i : Taux d'actualisation									
3		n : Nombre d'années précédant la diponibilité du capital C_n								C_n =	2500,00
4											
5	n \ i	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
6	1	2475,25	2450,98	2427,18	2403,85	2380,95	2358,49	2336,45	2314,81	2293,58	2272,73
7	2	2450,74	2402,92	2356,49	2311,39	2267,57	2224,99	2183,60	2143,35	2104,20	2066,12
8	3	2426,48	2355,81	2287,85	2222,49	2159,59	2099,06	2040,74	1984,58	1930,46	1878,29
9	4	2402,45	2309,61	2221,22	2137,01	2056,76	1980,23	1907,24	1837,57	1771,06	1707,53
10	5	2378,66	2264,33	2156,52	2054,82	1958,82	1868,15	1782,47	1701,46	1624,83	1552,30
11	6	2355,11	2219,93	2093,71	1975,79	1865,54	1762,40	1665,86	1575,42	1490,67	1411,18
12	7	2331,80	2176,40	2032,73	1899,79	1776,70	1662,64	1556,87	1458,73	1367,59	1282,90

Emprunts à annuités constantes

Lorsqu'un capital D_0 est emprunté au taux d'intérêt i sur une durée de n années, diverses modalités de remboursement peuvent être envisagées (amortissements constants, annuités constantes…).

Les amortissements sont les remboursements partiels successifs du capital emprunté. Les annuités sont les paiements annuels, sommes des intérêts et des amortissements.

Dans le cas d'amortissements constants sur une durée de n années, c'est-à-dire $\frac{D_0}{n}$, on constate que les annuités de remboursement diminuent au cours du temps ; elles forment une suite arithmétique de premier terme $D_0(i + \frac{1}{n})$ et de raison $-i\frac{D_0}{n}$.

Dans le cas d'annuités constantes qui permettent de rembourser intégralement l'emprunt en n années, les amortissements forment une suite géométrique de raison $(1 + i)$ et l'annuité a peut être exprimée en fonction de D_0 , i et n.

Années	Dette en début d'année	Intérêts de l'année	Amortissement de l'année	Annuités	Dette en fin d'année
1	D_0	$D_0 \times i$	A_1	$a = D_0 \times i + A_1$	$D_1 = D_0 - A_1$
2	D_1	$D_1 \times i$	A_2	$a = D_1 \times i + A_2$	$D_2 = D_1 - A_2$
…	…	…	…	…	…
p	D_{p-1}	$D_{p-1} \times i$	A_p	$a = D_{p-1} \times i + A_p$	$D_p = D_{p-1} - A_p$
$p + 1$	D_p	$D_p \times i$	A_{p+1}	$a = D_p \times i + A_{p+1}$	$D_{p+1} = D_p - A_{p+1}$
…	…	…	…	…	…
$n - 1$	D_{n-2}	$D_{n-2} \times i$	A_{n-1}	$a = D_{n-2} \times i + A_{n-1}$	$D_{n-1} = D_{n-2} - A_{n-1}$
n	D_{n-1}	$D_{n-1} \times i$	A_n	$a = D_{n-1} \times i + A_n$	$D_n = D_{n-1} - A_n$

Pour tout entier naturel non nul p inférieur à n, on a :

$D_p\, i + A_{p+1} = D_{p-1}\, i + A_p$

$A_{p+1} = (D_{p-1} - D_p)\, i + A_p$

$A_{p+1} = A_p\, i + A_p$

$A_{p+1} = A_p\, (1 + i)$

La suite des amortissements est une suite géométrique de raison $(1 + i)$.

Or, $D_n = 0$, donc $D_0 = A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} + A_n$

$D_0 = A_1\, [1 + (1 + i) + \ldots + (1 + i)^{(n-2)} + (1 + i)^{(n-1)}]$

D_0 est la somme des n termes d'une suite géométrique de raison $(1 + i)$ et de premier terme A_1.

D'où $D_0 = A_1 \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}$

$D_0 = A_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ et ainsi $A_1 = D_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1}$

Calcul de l'annuité : $a = D_0 i + A_1$

$$a = D_0 i\left(1 + \frac{1}{(1+i)^n - 1}\right)$$

$$a = D_0 i\left(\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right)$$

$$a = D_0\left(\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right)$$

On peut retrouver cette formule en remarquant que D_0 est la valeur actuelle de la suite des annuités (ci-après).

Exemples

1. Recherche expérimentale sur tableur

Une personne emprunte 11 000 € au taux de 4 %. Il est astreint à rembourser 1 000 € à la fin de chaque année pendant 9 ans et le solde à la fin de la dixième année. Déterminer la dixième annuité à l'aide d'un tableur en concevant une feuille de calcul permettant le changement de taux et d'autres montants des 9 premières annuités constantes.
Ce problème peut conduire à la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D	E
1	**Emprunt**		**Exercice préliminaire**		
2	Annuité	1000	€	Taux	4,00%
3	Années	Dette en début d'année	Intérêt de l'année	Annuité	Dette en fin d'année
4	1	11000,00	440,00	1000,00	10440,00
5	2	10440,00	417,60	1000,00	9857,60
6	3	9857,60	394,30	1000,00	9251,90
7	4	9251,90	370,08	1000,00	8621,98
8	5	8621,98	344,88	1000,00	7966,86
9	6	7966,86	318,67	1000,00	7285,53
10	7	7285,53	291,42	1000,00	6576,96
11	8	6576,96	263,08	1000,00	5840,03
12	9	5840,03	233,60	1000,00	5073,63
13	10	5073,63	202,95	**5276,58**	0,00

Il est alors possible de répondre expérimentalement à la question « Quel doit être le montant des annuités afin que les 10 annuités soient identiques ? », de compléter la feuille de calcul par le calcul des amortissements successifs et de leur somme et de conjecturer sur la suite obtenue.
La conjecture sur la suite des amortissements peut être testée sur d'autres montants d'emprunt et d'autres taux.
La programmation de la feuille de calcul fait appel à des adressages absolus et relatifs.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Emprunt**		**Recherche des annuités constantes**				
3	Annuité	1356,20	€	Taux	4,00%		
5	*Années*	*Dette en début d'année*	*Intérêt de l'année*	*Annuité*	*Dette en fin d'année*	*Amortissement*	*Coefficient multiplicateur*
6	1	11000,00	440,00	1356,20	10083,80	916,20	
7	2	10083,80	403,35	1356,20	9130,95	952,85	1,04
8	3	9130,95	365,24	1356,20	8139,99	990,96	1,04
9	4	8139,99	325,60	1356,20	7109,39	1030,60	1,04
10	5	7109,39	284,38	1356,20	6037,57	1071,82	1,04
11	6	6037,57	241,50	1356,20	4922,87	1114,70	1,04
12	7	4922,87	196,91	1356,20	3763,58	1159,29	1,04
13	8	3763,58	150,54	1356,20	2557,93	1205,66	1,04
14	9	2557,93	102,32	1356,20	1304,04	1253,88	1,04
15	10	1304,04	52,16	1356,20	0,00	1304,04	1,040003712
16			Somme des amortissements :			11000,00	

2. Construction du « service » d'un emprunt

Le service d'un emprunt est le tableau détaillé des intérêts et des amortissements à payer.
Une personne emprunte sur 10 ans 11 000 € au taux de 4 % et rembourse par annuités constantes. Réaliser à l'aide d'un tableur le service de l'emprunt. La feuille de calcul permettra le changement de capital et de taux.
La suite des amortissements est une suite géométrique de raison $(1 + i)$ et, en utilisant les notations précédentes, le premier amortissement est $A_1 = D_0 \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$.

La programmation de la feuille de calcul peut être faite à partir de l'expression de l'annuité en fonction du capital emprunté et du taux d'intérêt : $a = D_0 \left(\dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}} \right)$.

Elle fait appel à des adressages absolus et relatifs.

	A	B	C	D	E	F
1	**Service d'un emprunt**					
2	Capital emprunté :		11000,00	€	Taux :	4,00%
3						
4	Années	Dette en début d'année	Intérêts de l'année	Amortissement	Annuité	Dette en fin d'année
5	1	11000,00	440,00	916,20	1356,20	10083,80
6	2	10083,80	403,35	952,85	1356,20	9130,95
7	3	9130,95	365,24	990,96	1356,20	8139,99
8	4	8139,99	325,60	1030,60	1356,20	7109,39
9	5	7109,39	284,38	1071,82	1356,20	6037,56
10	6	6037,56	241,50	1114,70	1356,20	4922,87
11	7	4922,87	196,91	1159,29	1356,20	3763,58
12	8	3763,58	150,54	1205,66	1356,20	2557,92
13	9	2557,92	102,32	1253,88	1356,20	1304,04
14	10	1304,04	52,16	1304,04	1356,20	0,00

Sur cet exemple, on obtient : $a = 11000 \times \left(\frac{0,04}{1-(1,04)^{-10}}\right)$, soit $a \approx 1356,20$.

N.B. – La connaissance de la décomposition de la dernière annuité en intérêts et amortissement permet de retrouver le taux d'intérêt. Ceci se généralise dans le cas d'autres modalités d'amortissement.

3. Usage d'autres fonctions d'un tableur

Il est possible d'explorer quelques fonctions dédiées. Par exemple, le tableur *Excel*® offre les fonctions suivantes :

– NPM, qui renvoie le nombre de paiements d'un investissement à versements réguliers et taux d'intérêt constant.	– VPM, qui calcule le montant total de chaque remboursement périodique d'un investissement à remboursements et taux d'intérêt constants.
– PRINCPER, qui calcule la part de remboursement du principal d'un emprunt, fondée sur des remboursements et un taux d'intérêt constants.	– INTPER, qui calcule pour une période donnée, le montant des intérêts dus pour un emprunt remboursé par des versements périodiques constants, avec un taux d'intérêt constant.

Applications

a) Un emprunt d'un montant de 150 000 €, au taux annuel de 5,5 %, est remboursable à terme échu* par *n* annuités constantes de 17 400 €. Calculer le nombre de remboursements.

b) Un emprunt d'un montant de 200 000 €, au taux annuel de 6,2 %, est remboursable à terme échu* par 10 annuités constantes. Calculer le montant de l'annuité.

c) Un emprunt d'un montant de 68 000 €, au taux annuel de 6,5 %, est remboursable à terme échu* par 7 annuités constantes. Déterminer :

– le montant de l'annuité ;

– les montants des 1^er^ et 5^e^ amortissements ;

– le montant des intérêts versés à la 3^e^ échéance.

(*) « à terme échu » : chaque remboursement a lieu en fin de période.

Éléments de solution

	A	B	C	D	E	F
1	a)	Emprunt	150 000,00			
2		Taux	5,50 %			
3		Annuités	17 400,00			
4		**Durée**	**12,00424207**	**soit 12 ans**	**=NPM(5,5%;17400;-150 000;0)**	

	A	B	C	D	E	F
1	b)	Emprunt	200 000,00			
2		Taux	6,20 %			
3		**Annuités**	**27 431,66 €**	**soit VPM(0,062;10;-200000;;0)**		
4		Durée	10			

	A	B	C	D	E	
	c)	Emprunt	68 000,00			
1		Taux	6,50 %			
2		**Annuités**	**12 398,53 €**	**soit VPM(0,065;7;-68000;0)**		
3		Durée	7			
4						
5		Périodes	Amortissements	Intérêts	Annuités	
6		1	7 978,53	4 420,00	12 398,53	
7		3	9 049,45	3 349,08	12 398,53	
8		5	10 264,11	2 134,42	12 398,53	
9		soit 7 978,53=PRINCPER(6,5%;1;7;-68000;0)				
10		soit 3 349,08 =INTPER(6,5%;3;7;-68000;0)				

Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes

Lorsqu'un revenu est constitué d'un versement périodique régulier de a € à la fin de chaque année pendant n années, au lieu de disposer de ce revenu dans les années à venir, on peut vouloir disposer immédiatement de sa valeur actuelle au taux d'actualisation i. Il faut alors actualiser chaque annuité en fonction du nombre d'années d'actualisation :

Rang de l'année de versement	Nombre d'années d'actualisation	Valeur actuelle de l'annuité
1	1	$a(1+i)^{-1}$
2	2	$a(1+i)^{-2}$
…	…	…
…	…	…
$n-1$	$n-1$	$a(1+i)^{-(n-1)}$
n	n	$a(1+i)^{-n}$

La valeur actuelle, notée ici VA, de la suite d'annuité constante est la somme des n valeurs actuelles :

$VA = a(1+i)^{-n} + a(1+i)^{-(n-1)} + \ldots + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-1}$

Soit $VA = a[(1+i)^{-n} + (1+i)^{-(n-1)} + \ldots + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-1}]$

VA est la somme des n termes d'une suite géométrique de raison $(1+i)$ et de premier terme $a(1+i)-n$.

D'où $VA = a(1+i)^{-n}\dfrac{1-(1+i)^{n}}{1-(1+i)}$

$$VA = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Exemples

1. Quelle est la valeur actuelle au taux d'actualisation de 6 % d'une suite d'annuités constantes de 1 500 € versées à la fin de chaque année pendant 7 ans ?

Le tableau ci-dessous, obtenu à partir de la connaissance de l'expression donnant la valeur actuelle de chaque annuité, explicite les calculs à effectuer.

Rang de l'année de versement	Nombre d'années d'actualisation	Valeur actuelle de l'annuité
1	1	$1\,500 \times 1{,}06^{-1}$
2	2	$1\,500 \times 1{,}06^{-2}$
3	3	$1\,500 \times 1{,}06^{-3}$
4	4	$1\,500 \times 1{,}06^{-4}$
5	5	$1\,500 \times 1{,}06^{-5}$
6	6	$1\,500 \times 1{,}06^{-6}$
7	7	$1\,500 \times 1{,}06^{-7}$

La valeur actuelle de cette suite d'annuités constantes est donc :

$VA = 1\,500 \times (1{,}06^{-7} + 1{,}06^{-6} + 1{,}06^{-5} + 1{,}06^{-4} + 1{,}06^{-3} + 1{,}06^{-2} + 1{,}06^{-1})$.

Ainsi écrite, VA est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 1,06 et de premier terme $1\,500 \times 1{,}06^{-7}$. Le choix d'une sommation du rang 7 au rang 1 évite la raison $1{,}06^{-1}$.

D'où $VA = 1500 \times 1{,}06^{-7} \dfrac{1-1{,}06^{7}}{1-1{,}06}$

$VA = 1500 \times \dfrac{1-1{,}06^{-7}}{0{,}06}$

$VA \approx 8373{,}57$

Ce problème peut faire l'objet d'une résolution à l'aide d'un tableur :

	A	B	C	D
1	Valeur actuelle d'une suite d'annuités de 1 500 € versées en fin de chaque année pendant 7 ans			
2	au taux d'actualisation de 6 %			
2	Rang de l'année de versement	Nombre d'années d'actualisation	Valeur actuelle de l'annuité	
3	1	1	1415,09	
3	2	2	1334,99	
4	3	3	1259,43	
4	4	4	1188,14	
5	5	5	1120,89	
5	6	6	1057,44	
6	7	7	997,59	
6		Somme :	8373,57	

2. Un organisme financier propose deux rentes versées en fin d'année, l'une de 1 000 € pendant 5 ans, l'autre de 600 € pendant 9 ans. Comparer les deux rentes au taux d'actualisation de 4,8 %.

Ce problème peut être résolu en utilisant la démarche précédente. Il peut aussi motiver l'usage d'un tableur pour automatiser le calcul de la valeur actuelle en fonction du taux d'actualisation, du nombre d'annuités et du montant de l'annuité.

	A	B	C	D	E	F
1	Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes versées en fin de chaque année					
2		Taux d'actualisation :	0,048			
3		Nombre d'annuités :	5			
4		Montant des annuités :	1000			
5						
6	Valeur actuelle de la suite d'annuités constantes			4353,52	€	

	A	B	C	D	E	F
1	Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes versées en fin de chaque année					
2		Taux d'actualisation :	0,048			
3		Nombre d'annuités :	9			
4		Montant des annuités :	600			
5						
6	Valeur actuelle de la suite d'annuités constantes			4302,93	€	

Ainsi, au taux d'actualisation de 4,8 %, la première rente est plus avantageuse.

Un autre taux pourrait donner une conclusion différente (exemple 4 %).

La programmation nécessite la connaissance de $VA = a\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.

Elle ne fait appel qu'à des adressages relatifs.

Les valeurs actuelles sont obtenues dans la cellule D6 par la formule =C4*(1–(1+C2)^– C3)/C2.

3. Taux de rentabilité interne.

Un entrepreneur étudie un premier projet qui consiste à investir 10 000 € et à recevoir pendant 5 ans à la fin de chaque année un flux de trésorerie de 2 500 €. Quel est le taux d'actualisation tel que la valeur actuelle des flux de trésorerie soit égale à l'investissement initial ?

Il s'agit de résoudre l'équation $2\,500 \times \dfrac{1-(1+i)^{-5}}{i} = 10\,000$, où l'inconnue est le taux i.

Ce problème pourrait conduire à l'étude de la fonction f, définie sur $]0\,;+\infty[$, par $f(i) = -(1+i)^{-5} - 4i$.

a) Utilisation du tableur pour des approximations successives
La solution suivante prend appui sur l'usage du tableur et privilégie le choix d'un capital et d'un montant d'annuité quelconques.

– Première étape : encadrement du taux cherché.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	**Tableau : Valeur actuelle d'une suite de *n* annuités de *a* € payées en fin d'année : *a* ×(1 - (1+*i*)⁻ⁿ) / *i***														
2		*i* : Taux d'actualisation													
3		*n* : Nombre d'annuités				*a* =	2500	€							
4															
5	n \ i	5,50%	5,70%	5,90%	6,10%	6,30%	6,50%	6,70%	6,90%	7,10%	7,30%	7,50%	7,70%	7,90%	8,10%
6	1	2369,67	2365,18	2360,72	2356,27	2351,83	2347,42	2343,02	2338,63	2334,27	2329,92	2325,58	2321,26	2316,96	2312,67
7	2	4615,80	4602,82	4589,91	4577,07	4564,28	4551,57	4538,91	4526,32	4513,79	4501,32	4488,91	4476,57	4464,28	4452,06
8	3	6744,83	6719,60	6694,91	6670,19	6645,61	6621,19	6596,92	6572,80	6548,82	6525,00	6501,31	6477,78	6454,39	6431,13
9	4	8762,86	8722,61	8682,64	8642,96	8603,58	8564,50	8525,70	8487,18	8448,95	8410,99	8373,32	8335,91	8298,78	8261,92
10	5	10675,71	10617,41	10559,62	10502,32	10445,52	10389,20	10333,36	10278,00	10223,11	10169,09	10114,71	10061,20	10008,14	9955,52
11	6	12488,83	12410,04	12332,03	12254,70	12178,25	12102,53	12027,52	11953,23	11879,65	11806,78	11734,62	11663,14	11592,34	11522,22

La feuille calcule les valeurs actuelles pour un nombre *n* d'annuités constantes *a* avec un pas du taux d'actualisation de 0,2. On obtient l'encadrement : 7,90 % < *i* < 8,10%.

La programmation nécessite la connaissance de $VA = a\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.

Elle fait appel à des adressages absolus et relatifs.

– Seconde étape : choix d'un pas et d'un intervalle adapté.

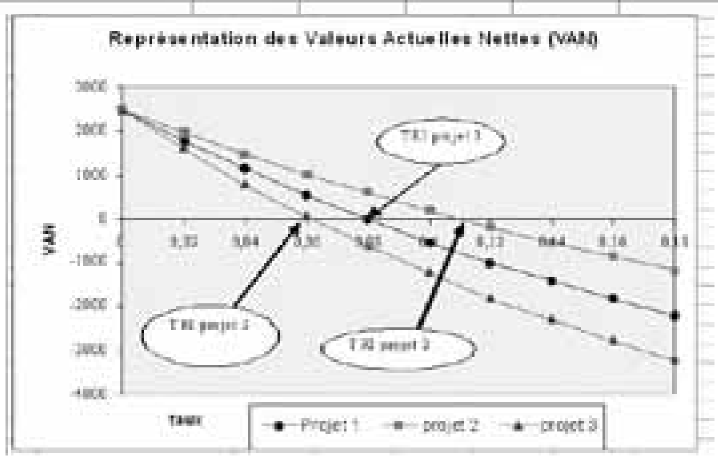
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	**Tableau : Valeur actuelle d'une suite de *n* annuités de *a* € payées en fin d'année : *a* ×(1 - (1+*i*)⁻ⁿ) / *i***														
2		*i* : Taux d'actualisation													
3		*n* : Nombre d'annuités				*a* =	2500	€							
4															
5	n \ i	7,90%	7,91%	7,92%	7,93%	7,94%	7,95%	7,96%	7,97%	7,98%	7,99%	8,00%	8,01%	8,02%	8,03%
6	1	2316,96	2316,75	2316,53	2316,32	2316,10	2315,89	2315,67	2315,46	2315,24	2315,03	2314,81	2314,60	2314,39	2314,17
7	2	4464,28	4463,67	4463,06	4462,44	4461,83	4461,22	4460,61	4460,00	4459,38	4458,77	4458,16	4457,55	4456,94	4456,33
8	3	6454,39	6453,22	6452,05	6450,89	6449,72	6448,56	6447,40	6446,23	6445,07	6443,91	6442,74	6441,58	6440,42	6439,26
9	4	8298,78	8296,93	8295,08	8293,24	8291,39	8289,54	8287,69	8285,85	8284,00	8282,16	8280,32	8278,47	8276,63	8274,79
10	5	10008,14	10005,50	10002,86	10008,14	9997,58	9994,94	9992,31	9989,67	9987,04	9984,41	9981,78	9979,14	9976,52	9973,89

Au centième près, le taux d'actualisation cherché est 7,93 %. C'est le taux de rentabilité interne (TRI) du projet.

b) Utilisation de fonctions dédiées du tableur
La feuille de calcul suivante donne une solution qui utilise une fonction spécifique du tableur qui calcule le taux de rentabilité interne.
La formule en B6 est =TRI(B5:G5).
La plage de cellules B5:G5 contient les « flux de trésorerie » : l'investissement initial qui est une dépense de – 10 000 €, et les recettes de 2 500 € chaque année.
L'étude peut alors être prolongée à deux autres projets pour le même investissement initial :
– projet 1 : recettes de 4 500 € la première année et décroissance de 1 000 € par an les années suivantes ;
– projet 2 : recettes de 500 € la première année et croissance de 1 000 € par an les années suivantes.
Il est alors possible de comparer ces trois projets d'investissement à partir de leur taux de rentabilité interne.
Une autre approche (à partir de la ligne 24) consiste à calculer les valeurs actuelles de chaque projet en fonction du taux d'actualisation. Cette transformation de toutes les valeurs comptables en valeurs actuelles donne la « valeur actuelle nette » (VAN) que le tableur permet d'obtenir par une fonction spécifique. Par exemple, pour le projet 1, en C29 la formule utilisée est =VAN(B29;$C$5:$G$5)+$B$5. Pour le taux d'actualisation de la cellule B29, la fonction VAN calcule la valeur actuelle de la suite d'annuités de la plage de cellules $C$5:$G$5. Il faut alors ajouter l'investissement initial de – 10 000 € situé dans la cellule $B$5.

La représentation graphique permet de retrouver les taux de rentabilité de chaque projet.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Projet 1**						
2	dates	0	1	2	3	4	5
3	investissement :	-10000					
4	annuité		2500	2500	2500	2500	2500
5	total	-10000	2500	2500	2500	2500	2500
6	taux de rentabilité interne :	7,93%					
7							
9	**Projet 2**						
10	dates	0	1	2	3	4	5
11	investissement :	-10000					
12	annuité		4500	3500	2500	1500	500
13	total	-10000	4500	3500	2500	1500	500
14	taux de rentabilité interne :	11,04%					
15							
17	**Projet 3**						
18	dates	0	1	2	3	4	5
19	investissement :	-10000					
20	annuité		500	1500	2500	3500	4500
21	total	-10000	500	1500	2500	3500	4500
22	taux de rentabilité interne :	6,12%					
23							
24	**Calcul des Valeurs Actuelles Nettes des 3 projets en fonction des taux d'actualisation**						
25		Taux en %	Projet 1	Projet 2	Projet 3		
26		0%	2 500	2 500	2500		
27		2%	1 784	1 970	1597		
28		4%	1 130	1 479	781		
29		6%	531	1 021	41		
30		8%	-18	595	-631		
31		10%	-523	197	-1243		
32		12%	-988	-176	-1801		
33		14%	-1 417	-524	-2310		
34		16%	-1 814	-851	-2777		
35		18%	-2 182	-1 159	-3205		



4. Solde libératoire d'une rente perpétuelle

Lorsqu'un organisme financier doit verser « à vie », à la fin de chaque année, une rente d'un montant constant, on parle de rente perpétuelle. Un taux d'actualisation étant fixé, celui-ci peut alors chercher à obtenir le capital minimal qu'il doit verser pour se libérer de sa dette. Ce capital est la valeur actuelle de la rente perpétuelle ou rente perpétuelle immédiate.

Ce capital peut être considéré comme la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes versées à la fin de chaque année dont le nombre est infini. C'est la limite lorsque n tend vers l'infini de la valeur actuelle $a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. C'est-à-dire $\frac{a}{i}$.

Exemple : Quelle est, au taux d'actualisation de 5 %, la valeur actuelle d'une rente perpétuelle de 1 000 € versée chaque fin d'année ?

Solution : 1000 : 0,05 = 20000, soit un solde libératoire de 20 000 €.

Un travail préliminaire sur tableur permet de conjecturer cette valeur et d'illustrer la limite d'une suite géométrique de raison comprise entre 0 et 1.

Multiplicateur d'investissement

On sait que dans un pays une politique de grands travaux (construction d'autoroutes, de logements…) peut avoir un effet boule de neige sur l'économie : cet investissement va, en effet, permettre à des entreprises de fonctionner et donc de distribuer du revenu, lequel sera dépensé, faisant ainsi tourner d'autres entreprises, etc.
Notons R le revenu global, C la consommation globale, I l'investissement global.
On fait l'hypothèse que la propension marginale à consommer $c = \frac{\Delta C}{\Delta R}$ est constante ; cela signifie qu'une variation de revenu ΔR entraîne une variation de consommation $c\Delta R$.
Le nombre c est bien entendu compris entre 0 et 1.
On suppose aussi que l'économie est fermée, de sorte que tout le revenu distribué est dépensé à l'intérieur du pays.
Considérons alors une augmentation ΔI de l'investissement global : elle entraîne immédiatement une augmentation de revenu ΔI pour les entreprises qui fournissent les biens concernés.
Celle-ci entraîne une augmentation de consommation $c\Delta I$, qui crée une augmentation de revenu $c\Delta I$ pour les entreprises.
Celle-ci entraîne à son tour une augmentation de consommation $c^2\Delta I$, qui crée une augmentation de revenu $c^2\Delta I$, etc.
Au bout de n périodes, l'augmentation de revenu est $(1 + c + c^2 + \ldots + c^{n-1})\Delta I$, c'est-à-dire $\frac{1-c^n}{1-c}\Delta I$.
Comme $0 < c < 1$, c^n est assez vite négligeable devant 1. Dit autrement, la suite de terme général c^n admet pour limite 0, donc, quand n tend vers $+\infty$, la suite de terme général $\frac{1-c^n}{1-c}$ admet pour limite $\frac{1}{1-c}$.
On peut donc considérer qu'en fin de compte, le revenu global a été augmenté d'une quantité $\frac{1}{1-c}\Delta I$.
Le nombre $\frac{1}{1-c}$ s'appelle le multiplicateur d'investissement.
Supposons par exemple que $c = 0{,}8$ (ce qui signifie que lors d'une augmentation de revenu, 80 % du revenu supplémentaire est consommé, 20 % étant épargné). Alors le multiplicateur est 5 : une augmentation de l'investissement global engendre une augmentation 5 fois plus grande du revenu global.

Utilisation de suites arithmétiques ou de suites géométriques

Modéliser avec une suite arithmétique

Cette activité de niveau première permet de tisser le lien entre une série statistique chronologique et une suite arithmétique qui la modélise dans le but d'élaborer une prévision.
Dans un pays, l'évolution du salaire mensuel minimum en euros au cours des dix dernières années est donnée par un tableau du type :

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S_n										
$S_n - S_{n-1}$										

À défaut de cas réel, on choisira les valeurs de S_n de manière à ce que l'augmentation soit « assez régulière ».
On peut alors :
– calculer la moyenne arithmétique des différences $S_n - S_{n-1}$;
– modéliser cette évolution par une suite arithmétique de raison la moyenne trouvée précédemment ;
– comparer les résultats réels et théoriques ;
– procéder à une prévision à moyen terme.

Modéliser avec une suite géométrique

Cette activité de niveau première permet d'établir le lien entre une série statistique chronologique et une suite géométrique qui la modélise dans le but d'obtenir une prévision de population.
L'évolution en millions d'habitants d'une population est donnée par le tableau suivant :

Année	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang	0	1	2	3	4	5	6	7
Q_n								
$\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$								

À défaut de cas réel, on choisira les valeurs de Q_n telles que l'augmentation soit voisine d'un taux constant, par exemple 2,5 %.
On peut alors :
– compléter le tableau ci-dessus et calculer la moyenne géométrique q des quotients $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$;
– modéliser cette évolution de population avec une suite géométrique de raison q;
– comparer le modèle et les données du tableau ;
– faire une prévision sur le nombre d'habitants à moyen terme.

Comparaison de suites arithmétiques et de suites géométriques

Modèles de dépréciation d'un équipement

Une entreprise doit tenir compte de la dépréciation de ses équipements (due à l'usure et à l'obsolescence), pour en dresser une juste estimation dans son bilan annuel.
Cette dépréciation peut être arithmétique ou géométrique.

Exemple

Une machine a été acquise pour 12 000 euros.
Si on estime que sa valeur d'usage diminue de 1 000 euros par an, celle-ci suit une progression arithmétique de raison – 1 000. Au bout de 10 ans la machine vaudra 2 000 euros.
Si on estime que sa valeur d'usage diminue de 20 % par an, celle-ci suit une progression géométrique de raison 0,8. Au bout de 10 ans la machine vaudra 1 288 euros.

Évolutions de salaires

Exemple

Un jeune travailleur a le choix entre deux contrats d'embauche.
Dans le premier contrat, on lui propose un salaire mensuel de 1 500 euros qui sera augmenté tous les ans de 60 euros.
Dans le second, on lui propose un salaire de 1 450 euros qui sera augmenté tous les ans de 4,5 %.

Cette situation peut conduire à la comparaison des salaires annuels obtenus avec ces deux contrats pendant les premières années, puis, à prolonger l'étude à l'aide d'un tableur, par exemple :
– en déterminant le nombre d'années nécessaires pour que le second contrat donne un salaire annuel plus grand que celui obtenu avec le premier contrat ;
– en calculant les sommes respectives des salaires gagnés avec le premier et le second contrat.
Une activité de niveau première si on utilise le tableur dans les questions 2 et 3 ou de niveau terminal en utilisant les formules de somme.

Population et moyens de subsistance

Dans son *Essai sur le principe de population* (1798), Thomas Robert Malthus compare l'évolution de la population avec l'évolution des moyens de subsistance :
« […] Nous pouvons donc tenir pour certain que lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle va doublant tous les vingt-cinq ans, et croît de période en période selon une progression géométrique.

[…] Les moyens de subsistance, dans les circonstances les plus favorables à l'industrie, ne peuvent jamais augmenter plus rapidement que selon une progression arithmétique. La conséquence inévitable de ces deux lois d'accroissement comparées, est assez frappante. Portons à onze millions la population de la Grande-Bretagne, et accordons que le produit actuel de son sol suffit pour maintenir une telle population. Au bout de vingt-cinq ans, la population serait de vingt-deux millions, et la nourriture étant aussi doublée suffirait encore à son entretien. Après une seconde période de vingt-cinq ans, la population serait portée à quarante-quatre millions, et les moyens de subsistance n'en pourraient plus soutenir que trente-trois. Dans la période suivante, la population arrivée à quatre-vingt-huit millions ne trouverait des moyens de subsistance que pour la moitié de ce nombre. À la fin du premier siècle, la population serait de cent soixante-dix-sept millions, et les moyens de subsistance ne pourraient suffire à plus de cinquante-cinq millions ; en sorte qu'une population de cent vingt et un millions d'hommes serait réduite à mourir de faim.
Substituons à cette île, qui nous a servi d'exemple, la surface entière de la terre, et d'abord on remarquera qu'il ne sera plus possible, pour éviter la famine, d'avoir recours à l'émigration. Portons à mille millions le nombre des habitants actuels de la terre : la race humaine croîtrait comme les nombres, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, tandis que la subsistance croîtrait comme ceux-ci, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Au bout de deux siècles, la population serait aux moyens de subsistance comme 256 est à 9 ; au bout de trois siècles, comme 4 096 est à 13 ; et après deux mille ans la différence serait immense et comme incalculable […]. »

À partir de ce texte, plusieurs questions peuvent être envisagées, par exemple :
– vérifier que pour doubler tous les 25 ans, la population doit augmenter en moyenne de 2,8 % par an ;
– vérifier les calculs de Malthus concernant la Grande-Bretagne, après avoir précisé ses hypothèses ;
– vérifier de même les calculs de Malthus concernant la terre entière, après avoir précisé ses hypothèses ;
– nous sommes actuellement deux siècles après Malthus : la situation confirme-t-elle ses prévisions ? Quels commentaires peut-on faire ?
Cette théorie a été contredite par l'histoire, mais elle demeure intéressante à étudier car c'est un bel exemple de modèle mathématique prévisionnel, dont il importe d'expliciter les hypothèses pour en comprendre les conclusions.

Taux proportionnel – taux équivalent

On distingue deux modes de calcul des intérêts : l'intérêt simple et l'intérêt composé.

Intérêt simple et taux proportionnel
L'intérêt simple est proportionnel à la durée de l'opération. Il est payé en une seule fois.
Si i est le taux d'intérêt sur une période (un jour, un mois, un trimestre), l'intérêt perçu pour un placement d'un capital C_0 sur une durée de n périodes est $C_0 \times i \times n$.
On peut, par exemple, chercher le taux mensuel correspondant à un taux annuel donné. On parle alors de taux proportionnel mensuel.

On a les relations $i_{m-prop} = \frac{1}{12} i_{annuel}$ et $i_{annuel} = 12 \times i_{m-prop}$.

C'est le cas de nombreux placements à court terme (inférieur à un an). Par exemple dans le domaine bancaire, par convention, la donnée du taux annuel divisé par 360 permet d'obtenir le taux d'une période de base (un jour), et la durée de l'opération est calculée en nombre exact de jours en incluant le premier jour et en excluant le dernier jour.

Exemple

Quel est l'intérêt perçu pour le placement à taux proportionnel de 2 500 € sur une durée de 72 jours au taux annuel de 4 % ?

On obtient $2\,500 \times (1 + \frac{0,04}{360} \times 72)$, soit 2 520 €.

Intérêt composé et taux équivalent

Dans le cas de l'intérêt composé, l'intérêt perçu à la fin de chaque période est replacé au cours des périodes suivantes ; il produit lui-même des intérêts. Le mode de calcul est celui de la valeur acquise par un capital placé à intérêts composés pendant un nombre entier de périodes.

Si i est le taux d'intérêt sur une période, pour un placement d'un capital C_0 sur une durée de n périodes, le capital obtenu est $C_0 \times (1 + i)^n$. Dans le cas où i est un taux d'intérêt mensuel, le taux d'intérêt correspondant à un placement annuel de C_0 est le taux annuel équivalent. Réciproquement, à un taux annuel correspond un taux mensuel équivalent.

On a les relations $i_{an\text{-}équi} = (1 + i_{m\text{-}équi})^{12} - 1$ et $i_{m\text{-}équi} = (1 + i_{an\text{-}équi})^{\frac{1}{12}} - 1$.

Exemples

1. Quel est le taux annuel équivalent à un taux mensuel de 0,4 % ?
2. Quel est le taux mensuel équivalent à un taux annuel 12 % ?

Éléments de réponse

1. $i_{an\text{-}équi} = (1 + 0{,}004)^{12} - 1$, soit $i_{an\text{-}équi} \approx 4{,}91$ %.

Ceci est à comparer au taux annuel proportionnel qui serait 4,8 % et correspondrait à celui qui serait obtenu à l'aide d'une approximation affine.

2. $i_{m\text{-}équi} = (1 + 0{,}12)^{\frac{1}{12}} - 1$, soit $i_{m\text{-}équi} \approx 0{,}95\%$. Le taux mensuel proportionnel serait 1 %.

Applications

a) Taux d'inflation semestriel équivalent : quel est le taux d'inflation semestriel équivalent à un taux d'inflation annuel de 4 % ?

b) Taux d'inflation annuel équivalent : quel est le taux d'inflation annuel équivalent qui doublerait les prix en dix ans ?

c) Taux d'inflation mensuel équivalent : quel est le taux d'inflation mensuel équivalent à un taux annuel de 6 % ?

Ces situations permettent aussi de comparer la valeur exacte et une valeur approchée obtenue par l'utilisation d'une approximation affine.

Pour un taux sur un nombre de périodes donné, sur une période, le taux proportionnel est toujours supérieur au taux équivalent.

Par exemple, dans le cas particulier où la période est un mois, à un taux annuel i_{annuel} correspond un taux mensuel équivalent $i_{m\text{-}équi}$ et un taux proportionnel $i_{m\text{-}prop}$.

On a les relations $1 + i_{annuel} = (1 + i_{m\text{-}équi})^{12}$ et $i_{annuel} = 12 \times i_{m\text{-}prop}$

Or, $(1 + i_{m\text{-}équi})^{12} \geq 1 + 12 \times i_{m\text{-}équi}$

d'où, $1 + i_{annuel} \geq 1 + 12 \times i_{m\text{-}équi}$

$1 + 12 \times i_{m\text{-}prop} \geq 1 + 12 \times i_{m\text{-}équi}$

Soit $i_{m\text{-}prop} \geq i_{m\text{-}équi}$

N.B. – Si n désigne la durée du placement en années, on sait que $C_n = C_0(1 + i)^n$.

On cherche ci-dessus à déterminer la valeur acquise pour une durée non entière. Cela revient à interpoler la suite (C_n) par une fonction f.

La méthode du taux équivalent utilise pour f la fonction exponentielle définie par $f(x) = C_0(1 + i)^x$. La méthode du taux proportionnel utilise une fonction f affine par intervalles.

La convexité de la fonction exponentielle permet d'expliquer graphiquement pourquoi le taux proportionnel est supérieur au taux équivalent

Exemple : $i = 50$ %.

Programmation linéaire

L'exemple qui suit illustre la recherche avec un tableur d'un minimum d'une expression du type $ax + by$ sous plusieurs contraintes linéaires.

Exemple

Une société de communication négocie des droits d'exploitation sur plusieurs années d'une chaîne de télévision à couverture nationale. Un contrat l'oblige à diffuser pendant cette période au moins 1 800 heures de fictions françaises, 1 800 heures de fictions européennes et 1 200 heures de reportages. Pour acheter les programmes, elle se fournit auprès de deux entreprises de production télévisuelle qui vendent des ensembles d'émissions clés en main appelés lots.

La société Damol propose des lots composés de la manière suivante :

– 90 heures de fictions françaises ;

– 120 heures de fictions européennes ;

– 40 heures de reportages.

Chaque lot coûte 20 000 M€.

La société Martel propose des lots composés de la manière suivante :

– 90 heures de fictions françaises ;

– 60 heures de fictions européennes ;

– 100 heures de reportages.

Chaque lot coûte 24 000 M€.

Déterminer l'achat qui permet de minimiser le coût des programmes achetés par la société.

Traduction de la situation

$$\text{Contraintes : } \begin{cases} x \text{ nombre entier positif} \\ y \text{ nombre entier positif} \\ x + y \geq 20 \\ 2x + y \geq 30 \\ 2x + 5y \geq 60 \end{cases}$$

Quantité à minimiser : $20x + 24y$.

Première solution

Étude des lignes de niveau de $20x + 24y$ et prise en compte des contraintes avec la fonction « SI… ALORS… SINON…. » d'un tableur. La programmation fait appel à des adressages absolus et relatifs.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1	y \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
2	0																								
3	1																								
4	2																								
5	3																								532
6	4																					496	516	536	556
7	5																			480	500	520	540	560	580
8	6																444	464	484	504	524	544	564	584	604
9	7														428	448	468	488	508	528	548	568	588	608	628
10	8													432	452	472	492	512	532	552	572	592	612	632	652
11	9												436	456	476	496	516	536	556	576	596	616	636	656	676
12	10											440	460	480	500	520	540	560	580	600	620	640	660	680	700
13	11											464	484	504	524	544	564	584	604	624	644	664	684	704	724
14	12										468	488	508	528	548	568	588	608	628	648	668	688	708	728	748
15	13										492	512	532	552	572	592	612	632	652	672	692	712	732	752	772

La formule utilisée dans la cellule B2, et reportée vers le bas puis vers la droite, est

=SI(((B$1+$A2)>=20)*ET((2*B$1+$A2)>=30)*ET((2*B$1+5*$A2)>=60);24*B$1+20*$A2;" ").

Elle permet si ($x + y \geq 20$ et $2x + y \geq 30$ et $2x + 5y \geq 60$) est vrai d'afficher la valeur $20x + 24y$ et une espace dans le cas contraire.

Il suffit alors d'observer que (13 ; 7) est le couple de nombres entiers qui minimise $20x + 24y$. Le coût minimal des programmes achetés est de 428 000 M€.

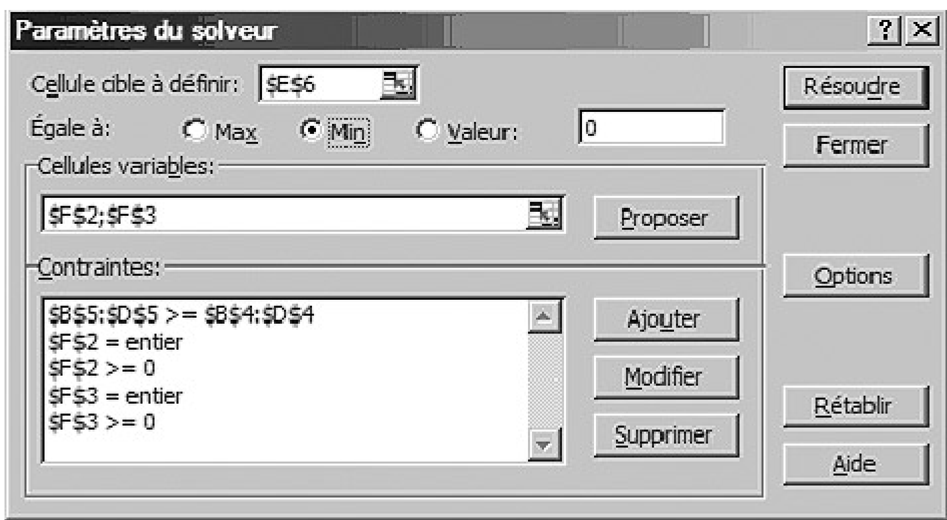
Seconde solution

Utilisation de la fonction SOLVEUR d'un tableur. La fonction SOLVEUR du tableur *Excel* permet de déterminer les quantités optimales de chaque lot à acheter pour minimiser le coût total.
Elle peut être utilisée à partir de la feuille de calcul ci-dessous où les cellules grisées sont saisies et traduisent les données de l'énoncé.

	A	B	C	D	E	F
1		Heures de fictions françaises	Heures de fictions étrangères	Heures de reportages	Coût unitaire	Quantité optimale
2	x	90	120	40	20000	13
3	y	90	60	100	24000	7
4	Nombre d'heures à diffuser	1 800	1 800	1 200		
5	Nombre d'heures achetées	1 800	1980	1220		
				Coût minimal	**428000**	

=B2*$F$2+B3*$F$3
=C2*$F$2+C3*$F$3
=D2*$F$2+D3*$F$3

Les quantités optimales (cellules F2 et F3) sont obtenues à l'aide du SOLVEUR programmé de la manière suivante :



Statistique et probabilités

Certaines difficultés rencontrées par les élèves proviennent d'une confusion entre ce qui relève des domaines de la statistique – observation du réel – et des probabilités – élaboration d'un modèle, tentative de prévision, à partir de celui-ci, d'événements non encore réalisés ou estimation à partir d'un échantillon (ce dernier aspect relève de l'enseignement post-baccalauréat), puis validation éventuelle de ce modèle.
Il importe de bien mettre en évidence la démarche, dans le temps, attachée à une expérience aléatoire : l'idée de probabilité d'un événement intervient avant la réalisation éventuelle de cet événement. Une fois l'expérience effectuée, on peut seulement observer, parmi les issues possibles, celles qui ont été réalisées et l'idée de probabilité n'intervient plus. Par exemple, lorsqu'un dé bien équilibré roule sur une table, il y a une probabilité $\frac{1}{6}$ que la face marquée 6 sorte. Quand il est arrêté, il y a un résultat observable mais plus de probabilité. On peut écrire : « La probabilité n'est pas dans le constat, elle est dans la procédure[1]. »
En français, le mot « réalisation » est d'ailleurs ambigu, car il désigne à la fois l'action de réaliser et le résultat de cette action.
Il convient également d'insister auprès des élèves sur le caractère non déterministe et donc sur la variabilité des résultats d'une expérience aléatoire, variabilité que la statistique peut mesurer.

Commentaires sur le programme – statistique

La statistique, d'une part, peut être reliée à la partie « information chiffrée » par son aspect descriptif ; d'autre part, elle s'appuie sur la théorie des probabilités pour le choix et la validation d'un modèle.
On peut travailler sur des données réelles que les élèves peuvent recueillir par enquête dans leur lycée, dans une entreprise, une administration, par investigation dans la presse ou sur le Web et qui ont un sens pour eux.
L'utilisation de la calculatrice ou du tableur permet le traitement d'un nombre important de données, nécessaire pour que l'étude statistique se justifie ; c'est pourquoi il faut consacrer un temps suffisant pour que les élèves maîtrisent, avec ces deux outils, les fonctions statistiques à leur programme.
Une des difficultés est l'introduction des données :
– pour une variable, il faut savoir indiquer l'emplacement des valeurs de la variable et celui des effectifs ;
– pour deux variables, il faut savoir indiquer l'emplacement des valeurs de chaque variable.
La diversité des modèles de calculatrice ne simplifie pas la tâche du professeur : des outils comme le cédérom *36 élèves, 36 calculatrices* de l'IREM de Lyon peuvent apporter une aide précieuse.

Classe de première

Les nouveautés de la classe de première concernent, d'une part, les tableaux de contingence (voir « Information chiffrée »), d'autre part, les paramètres de dispersion (écart type, écart interquartile).

1. « Enseigner la statistique au lycée », page 37, brochure n° 112 de la commission Inter-IREM Lycées technologiques.

D'une façon générale, le sens de la démarche est à privilégier. C'est pourquoi le programme insiste sur la rédaction de l'interprétation du résumé statistique obtenu, qu'il s'agisse du couple (moyenne ; écart type) ou du couple (médiane ; écart interquartile) : la moyenne et la médiane mesurent ce qu'il est convenu d'appeler la « tendance centrale » ou la « position » de la série statistique, alors que l'écart type ou l'écart interquartile en mesurent la « dispersion ». C'est souvent par la comparaison de deux ou plusieurs séries que ces notions prennent du sens : pensons, par exemple, à deux villes de même température moyenne, l'une au climat continental et l'autre au climat océanique ; ou à deux classes de première STG de même niveau médian, l'une homogène et l'autre hétérogène ; ou encore à la distribution des fréquences de succès dans deux échantillons d'une même épreuve répétée.
Une remarque concernant les regroupements de données en classes : le professeur doit veiller à ce que les élèves comprennent qu'à partir de données regroupées en classes, on ne peut obtenir que des approximations des paramètres statistiques. Les moyens techniques actuels permettant de traiter un très grand nombre de données, il convient de privilégier le traitement de données réelles discrètes pour déterminer ces paramètres. Cependant, le regroupement de données en classes peut être pertinent pour tracer une représentation graphique qui donne un sens à la distribution de la population étudiée.
En ce qui concerne les quantiles, le professeur lira avec profit le document d'accompagnement des programmes de la classe de première des séries générales. Il trouvera dans l'annexe 1, « Statistique et probabilités » (classe de première S), la définition de la fonction quantile.
Cette définition est difficilement accessible aux élèves. On peut d'ailleurs noter que de nombreux statisticiens, de nombreux logiciels préfèrent utiliser un algorithme pratique. Par exemple, pour trouver la médiane : on ordonne la série des observations par ordre croissant ; si la série est de taille $2n + 1$, la médiane est la valeur du terme de rang $n + 1$ dans cette série ordonnée ; si la série est de taille $2n$, la médiane est la demi-somme des valeurs des termes de rang n et $n + 1$ dans cette série ordonnée. On peut reprendre la même démarche pour trouver les quartiles.
Cette dernière définition de la médiane est celle adoptée dans le programme de seconde. Elle ne fournit pas toujours exactement le même résultat que la définition officielle ou que certaines calculatrices ou certains tableurs[2] Mais ces deux définitions donnent en pratique, pour des séries de grande taille (et ces notions ont un intérêt précisément dans ce contexte), des résultats très proches.
Il est préférable de distinguer l'« intervalle » interquartile [Q1 ; Q3] de l'« écart interquartile » Q3 – Q1 : utiliser le même mot ne pose aucun problème au statisticien chevronné, mais peut être source d'erreur pour l'élève de première. En outre, le mot écart souligne l'analogie avec l'écart type.
La médiane et les quartiles ont l'avantage de n'être pas sensibles aux valeurs extrêmes, contrairement à la moyenne et l'écart type : il faut faire comprendre aux élèves que, selon le contexte de l'exercice, il est préférable d'utiliser le couple moyenne-écart type ou le couple médiane-écart interquartile.
Actuellement, les outils informatiques fournissent automatiquement la moyenne et l'écart type ; les élèves doivent savoir interroger leur calculatrice pour les obtenir : cela nécessite un apprentissage spécifique, et ne dispense pas de faire un ou deux calculs à la main pour en comprendre le principe.
Le « diagramme en boîte » (dit aussi « diagramme de Tuckey », « boîte à moustaches » ou « boîte à pattes ») peut s'arrêter aux valeurs extrêmes ou aux derniers déciles selon les attentes précisées dans l'énoncé. Il permet des comparaisons visuelles rapides entre plusieurs séries statistiques, tant en ce qui concerne la tendance centrale que la dispersion.

Classe terminale

En terminale sont introduites les séries de données statistiques à deux variables. L'objectif est d'étudier le lien éventuel entre deux caractères d'une même population.

2. Certains tableurs utilisent un algorithme encore différent.

Pour deux variables qualitatives, on peut étudier leur dépendance[3] à l'aide des fréquences conditionnelles (voir « Information chiffrée ») et établir un lien avec le programme de probabilités (voir plus loin le conditionnement).
Pour deux variables quantitatives, on peut rechercher une formule approchée exprimant l'une des variables en fonction de l'autre : c'est la problématique de l'ajustement.
En première approximation, l'ajustement affine peut être réalisé graphiquement ; il s'agit alors de tracer, « à la main », quand la forme du nuage de points s'y prête, une droite passant « au plus près » des points du nuage.
Si l'objectif fixé par le problème le justifie, la calculatrice ou le tableur permettent un ajustement par la méthode des moindres carrés. Aucun calcul à la main concernant cette méthode ne peut être demandé aux élèves. On peut néanmoins en expliquer le principe pour une droite donnée d'équation $y = ax + b$, on compare les y_i observés aux $\hat{y}_i$ calculés (autrement dit les $ax_i + b$) en calculant les résidus $y_i - (ax_i + b)$. On souhaite trouver une droite pour laquelle ces résidus soient les plus faibles possibles. La droite des moindres carrés, ou droite de régression, est celle qui minimise la somme des carrés de ces résidus.
Pour un nuage donné, il est intéressant de comparer, à l'aide du tableur, la somme des carrés des résidus pour plusieurs droites obtenues par différentes façons (graphiquement, calculatrice, tableur) ; on vérifie, à cette occasion, que la droite de régression fournie par le tableur, donne une somme des carrés des résidus plus faible que les autres.
La mesure de l'ajustement par le coefficient de corrélation linéaire n'étant pas au programme, on veillera à ne traiter que des problèmes où l'ajustement affine a un sens (forme du nuage de points presque rectiligne). On pourra cependant envisager quelques exemples simples d'ajustement non affine et, en particulier, montrer comment des ajustements logarithmique ou exponentiel peuvent être ramenés à des ajustements affines par changement de variable.
Dans l'ajustement, les deux variables ne jouent pas un rôle symétrique. L'objectif étant en général de faire une prévision, on distingue la variable x (par exemple) sur laquelle on peut agir, ou qu'on peut facilement observer, de la variable y, qu'on ne peut atteindre que par l'intermédiaire de x. On cherche donc, dans ce cas, à exprimer y en fonction de x.
Toutefois, si le contexte de la classe est favorable, on pourra traiter un ou deux exemples de situations concrètes où les deux ajustements ont un sens et permettent de mettre en évidence la non-symétrie du rôle joué par chacune des deux variables.
Par exemple, si on s'intéresse au lien entre la dépense publicitaire *DP* d'une entreprise et son chiffre d'affaires *CA*, on peut étudier l'influence de *DP* sur *CA* mais aussi celle de *CA* sur *DP*. Il conviendra alors d'attribuer à ces deux variables une notation qui permette d'éviter toute confusion entre la variable représentée en abscisse et celle représentée en ordonnée dans chacun des deux ajustements.
Le professeur peut faire remarquer aux élèves que la droite de régression de y en x n'est pas la même que celle de x en y, que ces deux droites ne sont donc pas interchangeables (sauf dans le cas extrême où les points sont alignés) et veiller à ne pas demander une estimation de x en y en utilisant la droite de régression de y en x.
Si toute mesure de la corrélation est hors programme, il est néanmoins important d'évoquer la corrélation sous son aspect qualitatif et de mettre en évidence comment la corrélation se distingue de la causalité. « Corrélation n'est pas cause… L'enquête d'observation ne peut à elle seule qu'établir des corrélations[4]. » Le fait que deux variables soient fortement corrélées ne signifie pas que l'une soit cause de l'autre : il peut se produire, par exemple, qu'elles soient toutes deux conséquences d'une même cause. Un exemple classique est celui de la vente de crèmes solaires et de celle de crèmes glacées toutes deux conséquences de l'ensoleillement !
Les séries chronologiques, interviennent fréquemment en économie ou en gestion. Elles sont utiles pour les pratiques professionnelles futures des élèves. Ainsi, l'ajustement

3. On trouvera des indications intéressantes sur cette question, dans l'ouvrage *Statistique* de T. H. Wonnacott & R. J. Wonnacott, Éditions Économica, page 173 et suivantes .
4. Extrait de l'ouvrage, dont on ne saurait trop recommander la lecture, de Daniel Schwartz, *Le Jeu de la science et du hasard. La statistique et le vivant*, Éditions Flammarion. On trouvera dans cet essai de nombreux exemples pouvant enrichir la réflexion sur cette question.

peut permettre de prévoir une production ou les ventes d'un produit donné une année donnée…
Dans certaines situations, les valeurs sont affectées de variations saisonnières. Par exemple, le taux mensuel de chômage subit un pic en septembre dû à l'arrivée sur le marché du travail des jeunes ayant terminé leurs études. La prévision brute issue de l'ajustement doit alors être corrigée en tenant compte de cette variation. À ce propos, on pourra traiter, avec les élèves, à l'aide du tableur, un exemple de lissage par moyennes mobiles[5].

Commentaires sur le programme – probabilités

Pour étudier une épreuve aléatoire, on a besoin d'un modèle, qui précise, d'une part, les issues (on les suppose ici en nombre fini), d'autre part, la distribution de probabilité entre ces issues[6]. Or, mis à part les jeux de hasard où des hypothèses de symétrie fournissent *a priori* les probabilités des issues, c'est l'observation statistique antérieure qui permet d'estimer ces probabilités. Cette observation consiste à répéter l'épreuve un grand nombre de fois, et à relever dans cet échantillon les fréquences d'apparition des issues. Comme les divers échantillons fournissent des résultats différents, il est nécessaire d'étudier la fluctuation d'échantillonnage, autrement dit la variabilité entre les divers échantillons possibles de même taille. Le résultat essentiel, conforme à l'intuition, peut s'énoncer de façon qualitative en deux phrases :
– la distribution des fréquences fluctue autour de la distribution de probabilité ;
– l'amplitude de la fluctuation est d'autant plus faible que la taille de l'échantillon est grande.
Ces deux affirmations ont une justification théorique précise qui sort largement du cadre du programme des classes de première et terminale STG. Néanmoins, le travail expérimental fait en classe de seconde sur la fluctuation d'échantillonnage a sensibilisé les élèves à cette approche.

Classe de première

Une façon possible de présenter la notion de probabilité est de dire : « Tout se passe comme si on tirait, au hasard, une boule dans une urne contenant des boules indiscernables au moment du tirage mais de diverses couleurs, chaque couleur correspondant à une issue. » L'expression « au hasard », comme le mot « indiscernables » dans la phrase précédente, signifie, par convention, que chaque boule a « autant de chances » d'être choisie qu'une autre. La proportion de chaque couleur, autrement dit la probabilité de réalisation de chaque issue, est soit donnée *a priori*[7], soit estimée au préalable par répétition de l'épreuve (comme indiqué ci-dessus).
Cette présentation[8] a plusieurs avantages :
– elle fournit une image mentale de la probabilité et une méthode qui s'avère très efficace pour résoudre les problèmes, surtout quand on l'enrichit en traitant les tirages multiples (successifs avec remise, successifs sans remise) ;
– elle rend naturel le fait que la probabilité d'un événement soit la somme des probabilités de ses issues :
– elle permet de réinvestir directement les propriétés des proportions vues dans le chapitre « information chiffrée » ;
– elle permet de s'appuyer sur le travail effectué en seconde reliant la proportion de boules rouges dans l'urne et la fréquence d'apparition d'une boule rouge lors de tirages répétés ;
– elle fournit une méthode générale pour la simulation : si l'urne contient N boules, tirer une boule équivaut à choisir au hasard un entier entre 1 et N.

5. Voir par exemple *Utilisation de moyennes mobiles à la bourse*, annexe 2, brochure Inter-IREM n° 112, *opus* déjà cité.
6. Ce qu'en langage savant on appelle un « espace probabilisé ».
7. C'est le cas notamment quand on parle de dé « régulier », de pièce « équilibrée », de jeu de cartes « bien battu »…
8. Conforme à une tradition historique initiée par J. Bernoulli puis reprise par Laplace et d'autres.

Les tirages (simples ou multiples) dans une urne apparaissent ainsi comme les épreuves de référence, jouant le même rôle en probabilités que les fonctions de référence en analyse, les configurations clés ou les transformations usuelles en géométrie.
Pour les tirages successifs, avec ou sans remise, on se limite à deux ou trois répétitions, l'objectif du programme étant de travailler sur les probabilités et en aucun cas de traiter du dénombrement.
L'essentiel est en effet de faire comprendre :
– que l'équiprobabilité des boules dans l'urne induit l'équiprobabilité des couples ou des triplets ;
– que, dans le cas de tirages avec remise, contrairement au tirage sans remise, on répète plusieurs fois la même épreuve (on dit en terminale que les tirages sont indépendants).
L'utilisation des arbres probabilistes permet aux élèves de visualiser la succession des différentes issues possibles. On se limite en première à des arbres à branches équiprobables.
Les tirages simultanés ne sont pas au programme du cycle terminal : la plupart des situations où ils se présentent peuvent être traitées par des tirages successifs sans remise.

Classe terminale

La notion de probabilité conditionnelle introduite en terminale prolonge naturellement celle de fréquence conditionnelle vue en première.

Exemple

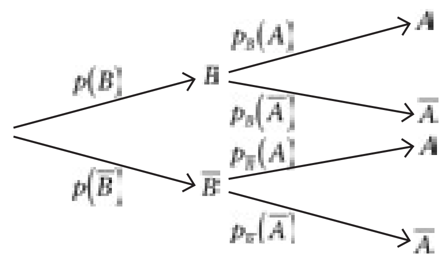
Une enquête effectuée dans une entreprise concernant le sexe et le salaire des employés a donné les résultats suivants :

	Salaire inférieur strictement à 1 200 €	Salaire supérieur ou égal à 1 200 €
Femmes	300	400
Hommes	200	600

Ce tableau peut être traité avec le langage des statistiques :
Soit Ω l'ensemble des personnes employées dans l'entreprise. On note B l'ensemble des employées femmes et A l'ensemble des personnes qui gagnent moins de 1 200 €.
– La proportion (fréquence) de femmes parmi les personnes employées est $f(B)=\frac{700}{1500}$.
– La proportion de personnes gagnant moins de 1 200 € parmi les personnes employées est $f(A)=\frac{500}{1500}$.
– La proportion de femmes gagnant moins de 1 200 € parmi les personnes employées est $f(A\cap B)=\frac{300}{1500}$.
– La proportion de personnes gagnant moins de 1 200 € parmi les femmes est $f_B(A)=\frac{300}{700}$, elle est égale à $\frac{f(A\cap B)}{f(B)}$.
Ce même tableau peut être traité avec le langage des probabilités :
Considérons l'épreuve aléatoire qui consiste à choisir au hasard une personne employée dans l'entreprise. Son univers est l'ensemble Ω des personnes employées. L'expression « au hasard » garantit l'équiprobabilité des issues. On note B l'événement « la personne est une femme » et A l'événement « la personne gagne moins de 1 200 € ».
– La probabilité que la personne choisie soit une femme est $p(B)=\frac{700}{1500}$.
– La probabilité que la personne choisie gagne moins de 1 200 € est $p(A)=\frac{500}{1500}$.
– La probabilité que la personne choisie soit une femme gagnant moins de 1 200 € est $p(A\cap B)=\frac{300}{1500}$.
– La probabilité, sachant que la personne choisie est une femme, qu'elle gagne moins de 1 200 € est $\frac{300}{700}$: elle est notée $p_B(A)$ et est égale à $\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$.

Une des difficultés est alors de faire comprendre qu'on garde le même univers. En effet, établir l'hypothèse que B est réalisé revient à modifier l'épreuve. Les issues de la nouvelle épreuve étant celles de B, il paraît naturel de prendre l'ensemble B comme nouvel univers. Ce dernier point de vue pose néanmoins problème dans la mesure où l'indépendance des deux événements A et B pour la probabilité p ne peut être définie si l'on ne considère que des événements A inclus dans B. C'est pourquoi, il faut choisir de garder Ω comme univers et de modifier la distribution de probabilité. La nouvelle distribution de probabilité, notée p_B, associe à toute partie A de Ω, la probabilité $\frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Ainsi, toutes les issues non éléments de B ont une probabilité nulle. À partir du sens ainsi donné à la notion de probabilité conditionnelle, les élèves peuvent aisément relier la définition de l'indépendance de A et de B donnée dans le cours sous la forme $pA(A \cap B) = p(A)p(B)$ avec l'idée concrète qu'ils peuvent s'en faire : A et B sont indépendants si la réalisation de B ne modifie pas la valeur de la probabilité de A d'un modèle à l'autre : $p_B(A) = p(A)$.
Notons au passage que la notation $p(A/B)$, usuelle en mathématiques appliquées, masque ce point que p_B est une distribution de probabilité et peut faire croire à tort que A/B est un événement.
L'analyse qui vient d'être réalisée des tableaux d'effectifs à deux entrées est un champ d'application important de la notion de probabilité conditionnelle. Un autre champ d'application est l'étude des épreuves successives : en les modélisant par des tirages successifs dans une urne, on est conduit à distinguer les tirages avec ou sans remise, ce qui permet de bien différencier l'indépendance et la dépendance.
Les arbres probabilistes sont un outil très efficace pour visualiser les propriétés et traiter les problèmes. En première, seuls des arbres à branches équiprobables, donc non pondérées, ont été utilisés. On peut observer que les arbres à branches pondérées sont une façon de résumer les arbres non pondérés par regroupement des branches. On peut aussi les rapprocher des arbres de répartition vus en première à l'occasion des tableaux de contingence.



Trois propriétés sont très utiles pour construire les arbres et les utiliser :
1. La probabilité d'un chemin[9] est le produit des probabilités de ses branches.
2. Pour les branches issues d'un même nœud[10], la somme des probabilités vaut 1.
3.La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.
En particulier, dans le cas d'un arbre à deux branches, ces propriétés se traduisent ainsi :

$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

$p_B(A) + p_B(\overline{A}) = 1$

$p(A) = p(B) \cdot p_B(A) + p(\overline{B}) \cdot p_{\overline{B}}(A)$

La première formule découle de la définition de la probabilité conditionnelle ; la deuxième du théorème des probabilités totales $p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p(B)$; la troisième du même théorème, écrit sous la forme $p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) = p(A)$.
On admet que ces propriétés restent vraies quel que soit le nombre de niveaux de l'arbre et quel que soit le nombre de branches issues d'un nœud.
Lors d'évaluations, l'utilisation correcte d'un arbre bien construit doit être acceptée comme démonstration.

9. Un chemin est l'événement réalisé en suivant de gauche à droite des branches successives.
10. Un nœud est la jonction de deux ou plusieurs branches.

Un point délicat est la notion de dépendance. Le sens donné au mot dépendant dans le langage courant : « qui ne peut se réaliser sans l'action préalable d'une personne ou d'une chose » peut constituer une première approche. Il convient néanmoins de signaler l'ambiguïté que peut induire cette « définition » dans le domaine mathématique : l'écriture « probabilité, sachant B, de A » fait dépendre de la réalisation de B la « probabilité de la réalisation » de A et non pas la « réalisation » de A elle-même. D'où la nécessité des formules caractérisant l'indépendance[11].
Le professeur trouvera une réflexion sur les liens entre dépendance causale et stochastique dans la partie « Statistique et probabilités » du document d'accompagnement des programmes des classes de terminale S et ES.
La formule de Bayes n'est pas exigible sous sa forme générale. Cela n'empêche pas de traiter quelques exemples de situations où, connaissant $P(B)$, $P_B(A)$ et $P_{\bar{B}}(A)$, on cherche $P_A(B)$. Cela permet d'aborder la problématique de la « probabilité des causes » où, de façon qui peut sembler paradoxale, on s'intéresse à la probabilité d'un événement passé.

Approfondissements pour le professeur

Lecture de tableaux

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de bacheliers en France métropolitaine depuis 1980 (source : MEN – DPD).

Série / Année	L	ES	S	STI	STL	STT	Autres techno + bac pro
1980	40 391	31 521	87 859	16 504	3 047	35 605	7 502
1990	63 727	60 092	123 401	26 953	3 878	70 249	35 650
1995	69 490	74 961	136 355	34 461	4 802	76 373	84 212
2000	57 413	73 254	133 014	36 039	6 224	79 457	116 540

Voici quelques questions possibles :
– Comment retrouver, à partir des taux d'évolutions successifs, les taux d'évolution sur une décennie ?
– Est-ce que la série dont le taux d'évolution est le plus important a le plus contribué à l'accroissement du nombre total de bacheliers ?
– Comment traduire une information du type : au cours d'une décennie le nombre de bacheliers d'une série est multiplié par x, en terme de taux d'évolution ?
– Quelle information peut-on tirer de ce tableau sur les taux l'évolution des différents baccalauréats en France métropolitaine ?
En terminale, en prolongement de cet exercice, on peut faire calculer aux élèves le taux d'évolution moyen par année et créer le lien avec le taux d'évolution global. Ces données peuvent aussi être utilisées pour un ajustement.
Cet exercice permet d'évoquer la pertinence ou non d'un modèle d'évolution, construit à partir de ces données, pour estimer les variations futures du nombre de bacheliers pour chacune des sept séries.

Effet de structure

Ce qui est vrai pour les parties peut ne pas l'être pour l'ensemble !

Sexe et tabagisme

Au lycée Parc-de-Vilgénis, une enquête a permis de donner les renseignements suivants :
– dans la classe de seconde A, un garçon fume en moyenne 12 cigarettes par jour et une fille 7 ;

11. Sur ces questions de probabilités conditionnelles et d'indépendance, on lira avec profit l'ouvrage *Enseigner les probabilités au lycée*, commission Inter-IREM, Statistique et Probabilités, édité par l'IREM de REIMS. On y trouvera également des idées d'activités.

– dans la classe de seconde B, un garçon fume en moyenne 10 cigarettes par jour et une fille 6.
Peut-on, à partir de ces seules données, comparer l'importance du tabagisme dans ces deux classes ?

Comparaison de salaires

Il n'y a pas si longtemps, au *Clavier enchaîné* travaillaient 20 clavistes à 5 000 F mensuels et 5 linotypistes[12] à 7 500 F mensuels. Au *Clavier déchaîné* travaillaient 10 clavistes à 4 500 F mensuels et 15 linotypistes à 7 000 F mensuels.
Dans lequel de ces deux journaux a-t-on intérêt à se faire embaucher ?

Parité

En 1973, à la « Graduate School » de Berkeley, 3 700 des 8 300 hommes candidats et 1 500 des 4 300 femmes candidates furent reçus (Bickel et O'Connel, 1975).
1. Quelle est la différence entre le taux d'admission des hommes et celui des femmes ? Pensez-vous que cette différence provienne d'une discrimination sexuelle ?
2. Pour trouver d'où provient cette différence, les données sont classées par filière de la façon suivante :

	Hommes		Femmes	
	Nombre de candidats	Nombre de reçus	Nombre de candidates	Nombre de reçues
Arts	2 300	700	3 200	900
Sciences	6 000	3 000	1 100	600
Total	8 300	3 700	4 300	1 500

Quelle est maintenant la différence entre les taux d'admission des hommes et des femmes pour les arts et pour les sciences
3. Expliquer pourquoi les deux premières réponses semblent contradictoires.
Était-il difficile pour une femme d'entrer à Berkeley en 1973 ?

Simulation et fluctuation d'échantillonnage

En classe de seconde, les élèves ont déjà été sensibilisés à la variabilité des résultats d'une expérience aléatoire avec le travail effectué sur la simulation et la fluctuation d'échantillonnage. En première et en terminale, on pourra évoquer des applications de la statistique et des probabilités : contrôle de qualité, étude de clientèle, sondage, médecine…
On trouvera des activités dans les brochures suivantes : « Simulation et Statistique en seconde », brochure n° 102, avec un cédérom, de la commission Inter-IREM, lycées technologiques ; « Simulation d'expériences aléatoires, une expérimentation du hasard de la première au BTS sur calculatrice et ordinateur » de la commission Inter-IREM, lycées technologiques.
Le cédérom joint au document d'accompagnement des programmes des classes de première des séries générales fournit également des activités sur ces thèmes.
La répétition d'une épreuve peut être effective ou simulée. Dans le cas de la simulation, cela suppose le choix préalable d'un modèle. Par exemple, on peut jeter 1 000 fois un dé matériel pour savoir si on peut le considérer comme régulier ; mais pour simuler un dé, il faut *a priori* le supposer régulier[13].
Dans les deux cas, la répétition permet de comparer la probabilité p d'un événement avec sa fréquence f d'apparition, la seconde ayant de fortes chances d'être une valeur approchée de la première.

12. Linotypiste : personne composant les lignes de caractères. Claviste : personne qui, dans une imprimerie, compose sur un clavier les caractères d'un texte à imprimer.
13. Ou, si on le suppose pipé, se donner explicitement la répartition de probabilité des six valeurs.

La théorie[14] indique en effet que si n est le nombre de répétitions, la probabilité que l'écart entre f et p dépasse $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est inférieure à 0,1 quels que soient n et p, et même à 0,05 quel que soit p, si n dépasse 55 215.
La répétition effective d'une épreuve permet d'estimer les probabilités des issues et donc de choisir un modèle.
La répétition simulée, quant à elle, permet de vérifier expérimentalement (avec une précision de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$) le résultat théorique du calcul de la probabilité d'un événement ; elle permet aussi d'estimer la probabilité d'un événement quand on ne sait pas la calculer de façon théorique.

Exemple d'activité

Un jeu consiste à jeter deux dés réguliers indépendants. On gagne si la somme des points dépasse strictement 10. On cherche la probabilité p de gagner :
– on peut, en premier lieu, rechercher une valeur approchée de cette probabilité en simulant, à l'aide de la calculatrice ou du tableur, 100 réalisations de cette épreuve ;
– dans un second temps, on peut rechercher la valeur exacte par le raisonnement, en construisant un arbre par exemple ;
– les résultats des deux démarches sont-ils compatibles ?
La simulation appelle une compétence particulière, utilisant la fonction ALEA( ) sur tableur ou la fonction RANDOM sur calculatrice. Il est intéressant d'observer que chaque élève obtient une fréquence de succès différente (ce qui traduit le caractère aléatoire de l'épreuve), mais que dans leur quasi-totalité ces fréquences sont situées dans un intervalle d'amplitude 0,2 c'est-à-dire $2 \times \frac{1}{\sqrt{100}}$.
Le raisonnement utilisé pour trouver la probabilité s'appuie sur deux hypothèses, souvent implicites mais ici explicitées : les deux dés sont réguliers[16] et les deux jets sont indépendants.
On pourrait d'ailleurs se reporter au modèle d'une urne contenant 6 boules, dans laquelle on effectue deux tirages avec remise. La liste des issues peut alors s'obtenir à l'aide d'un arbre. On en déduit la probabilité de succès : $\frac{1}{12}$.
La plupart des élèves (environ 95 % d'entre eux) doivent alors constater que le résultat obtenu par la première démarche est une valeur approchée de $\frac{1}{12}$ à 0,1 près.
On peut formuler une analogie avec la géométrie :

Exemple

Un terrain rectangulaire a pour côtés 50 m et 20 m. Cherchons la longueur de sa diagonale.
Deux approches sont possibles :
– on trace un dessin à l'échelle et on mesure la longueur cherchée ;
– on applique le théorème de Pythagore.

On constate que la première méthode a l'inconvénient de fournir une valeur seulement approchée, mais l'avantage de faire appel à peu de connaissances théoriques.
Dans certaines situations complexes, elle s'avère être la méthode la moins coûteuse, voire la seule accessible si on ignore les lois susceptibles de régir ces situations.
De plus, elle permet, le cas échéant, de formuler des hypothèses sur ces lois.
La même dualité se retrouve en analyse.

Exemple

On recherche le maximum d'une fonction.
– on la tabule au tableur ou à la calculatrice,
– on étudie le signe de la dérivée.

---

14. Fondée sur la loi binomiale.
15 Voir *Bulletin de l'APMEP* n° 436, page 733.
16. Il serait plus juste de parler de « jet de dé régulier » : l'équiprobabilité des issues dépend non seulement des caractéristiques physiques du dé lui-même, mais aussi de la façon dont il est lancé, de la table, de l'atmosphère…

Ajustement

L'ajustement d'une fonction mathématique à des données observées est à la jonction de plusieurs branches des mathématiques : analyse, géométrie, algèbre linéaire, statistique, probabilités.

C'est clairement l'aspect « statistique descriptive » qui est au programme de terminale STG. Mais on peut, ici, élargir le propos. La question posée est celle-ci : on dispose de n observations sous forme de couples $(x_i\,;\,y_i)$. On cherche dans une certaine famille de fonctions, la fonction f pour laquelle les $f(x_i)$ sont les plus proches possible des y_i ; autrement dit pour laquelle les résidus $y_i - f(x_i)$ sont les plus petits possibles.

La famille peut être celle des fonctions affines. La somme E des carrés des résidus a alors l'avantage d'être un polynôme du second degré en a et b, facile à minimiser de façon exacte. Dans l'enseignement supérieur, on écrira simplement $\frac{\partial E}{\partial a} = 0$ et $\frac{\partial E}{\partial b} = 0$, ce qui fournit un système de deux équations du premier degré pour déterminer a et b. Mais on peut remarquer que le problème a dans R^n une interprétation géométrique intéressante et féconde : si on appelle X le vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, Y le vecteur $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, I le vecteur $(1, 1, \ldots, 1)$, le problème revient à chercher a et b tels que le nombre réel $\|Y - aX - bI\|^2$ soit minimal, autrement dit à déterminer le projeté orthogonal de Y sur le plan vectoriel engendré par X et I. Il suffit d'écrire que le vecteur $Y - aX - bI$ est orthogonal à I et à X pour retrouver le système précédent.

Le coefficient de corrélation linéaire s'interprète alors comme le cosinus de l'angle des deux vecteurs $X - \overline{X}\,I$ et $Y - \overline{Y}\,I$.

La famille peut être celle des fonctions $x \mapsto a\ln(x) + b$ ou $x \mapsto Be^{ax}$. La pratique courante consiste à se ramener au cas affine par changement de variable.

La famille peut être celle des fonctions polynômes. Si les x_i sont tous distincts, il y a un polynôme unique f de degré $n - 1$ tel que, pour tout i, $f(x_i) = y_i$; il est donné par la formule d'interpolation de Lagrange : $f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

La possibilité théorique d'ajuster exactement une fonction polynôme à n'importe quel nuage de points permet de réfléchir sur la problématique de l'ajustement : en pratique les données sont entachées d'une certaine incertitude, et on cherche une fonction simple qui permette un ajustement compatible avec cette marge d'incertitude. Un ajustement exact par une fonction compliquée ne répondrait pas à l'objectif.

La théorie ci-dessus, appliquée aux statistiques, porte (improprement) le nom de « régression » depuis Francis Galton (*Natural Inheritance*, 1877). Son intérêt est de permettre des interpolations et des extrapolations et, donc, des prévisions.

Bien entendu, après un ou deux exemples où les calculs ont été faits à la main, le tableur ou la calculatrice seront utilisés pour obtenir directement les coefficients[17].

L'essentiel est alors l'interprétation. En particulier, on insistera sur la distinction entre corrélation et causalité.

L'ajustement affine est d'autant plus pertinent que $|r|$ est proche de 1 et que le nombre n de points du nuage est important. À partir de quelle valeur de $|r|$, et de quel effectif, peut-on dire que la corrélation est « significative » ?

Si l'on en reste à la statistique descriptive, répondre à ces deux questions n'est pas possible. C'est pourquoi, Karl Pearson, théorisant les intuitions de Galton, a enrichi la notion de régression en introduisant les probabilités, ce qui donne des outils pour tester la significativité de r en fonction de n. Sa théorie dépasse largement le programme de terminale STG.

Un exemple d'ajustement affine à l'aide du tableur

Exemple

L'entreprise Galion souhaite déterminer les ventes prévisionnelles des quatre trimestres de l'année $N + 1$.

17. Avec la calculatrice, il faut prendre garde à l'habitude anglo-saxonne de nommer a l'ordonnée à l'origine et b le coefficient directeur.

Les chiffres d'affaires trimestriels réalisés au cours des trois dernières années ont été les suivants :

Période	Rang de la période	Chiffre d'affaires en milliers d'euros
1er trimestre $N-2$	1	4 200
2e trimestre $N-2$	2	4 350
3e trimestre $N-2$	3	4 620
4e trimestre $N-2$	4	4 770
1er trimestre $N-1$	5	4 920
2e trimestre $N-1$	6	4 650
3e trimestre $N-1$	7	4 880
4e trimestre $N-1$	8	5 010
1er trimestre N	9	5 155
2e trimestre N	10	4 860
3e trimestre N	11	5 110
4e trimestre N	12	5 230

Déterminez à l'aide du tableur une équation d'une droite d'ajustement et les prévisions pour l'année $N+1$.

La démarche est la suivante :
– capturer les données avec la souris ;
– insérer un graphique en courbes ;
– une fois le graphique réalisé, cliquer avec le bouton droit de la souris et sélectionner « Ajouter une courbe de tendance » ;
– choisir le type linéaire ;
– cocher l'option « Afficher l'équation sur le graphique » ;
– le tableur permet aussi de déterminer les valeurs prévisionnelles avec la fonction prévision ou tendance.

Comparaison de différents ajustements

Exemple

Au cours d'une période d'hiver, le chargé de maintenance d'une entreprise a relevé certains jours la température extérieure moyenne de la journée et la consommation de fioul de la chaudière pendant la même journée. Il a obtenu le tableau suivant :

Température X (en degrés)	– 6	– 5	– 3	– 2	– 1	1	2	3	5	6
Consommation Y (en litres)	400	390	360	330	310	290	260	250	200	190

Les données ont été choisies de façon à permettre des calculs simples et exacts de façon à éviter que les élèves ne confondent les résidus avec les erreurs d'arrondi.
Après avoir tracé le nuage de points, on pourra essayer des ajustements empiriques, par exemple $y = -20x + 300$ ou $y = -19x + 300$ ou $y = -18y + 300$.
Graphiquement, toutes ces droites semblent satisfaisantes. Pour les comparer, il faut donc convenir d'un critère. Les élèves peuvent penser à calculer la moyenne des résidus. Mais les résidus positifs et négatifs peuvent se compenser, même si la droite est très éloignée du nuage : il suffit qu'elle passe par le point moyen (0 ; 298) pour que la moyenne des résidus soit nulle.
Par exemple la droite d'équation $y = 100x + 298$, visiblement très mauvaise, fournit une moyenne des résidus nulle.
On peut supprimer cet inconvénient en élevant les résidus au carré. Pour comparer deux droites, on comparera la moyenne des carrés des résidus ou, ce qui revient au même,

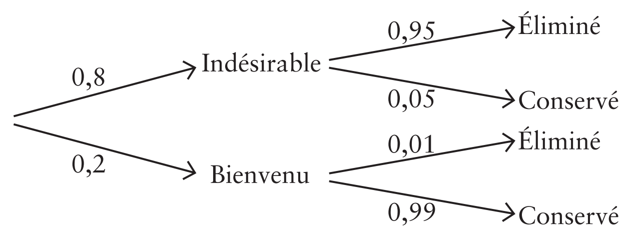
leur somme. La meilleure droite est, bien entendu, celle pour laquelle cette somme est la plus faible.
On verra, à l'occasion de cet exemple, que la droite fournie par le tableur est précisément celle qui minimise la somme des carrés des résidus.
Cet exemple permet également de montrer l'enjeu de l'ajustement. On peut souligner que toute prévision est à prendre avec prudence : d'une part, des travaux d'isolation pourraient la modifier de façon importante, d'autre part, elle a un domaine de validité limité (il serait absurde de vouloir l'appliquer pour une journée à 20° !).

Probabilités conditionnelles et indépendance

Filtrage de messages électroniques

Version statistique (niveau première)
Un logiciel de messagerie électronique comporte un module chargé de filtrer les messages indésirables (*spam* en anglais).
On estime à 80 % la proportion de messages indésirables parmi les messages entrants.
Le module de filtrage élimine 95 % des messages indésirables, mais élimine aussi 1 % des messages bienvenus.
Parmi les messages éliminés, quelle est la proportion de messages bienvenus ?

Version probabiliste (niveau terminal)
Un logiciel de messagerie électronique comporte un module chargé de filtrer les messages indésirables (*spam* en anglais). Un nouveau message arrive. On estime à 80 % la probabilité qu'il soit indésirable. La probabilité de son élimination, s'il est indésirable, est de 95 %, mais s'il est le bienvenu, la probabilité de son élimination est de 1 %.



Quelle est la probabilité, si le message est éliminé, qu'il soit le bienvenu ?
La comparaison entre le langage statistique et le langage probabiliste peut être éclairante. Dans les deux approches, les données peuvent être traduites par un arbre :
– en première, il s'agit d'un arbre de répartition, les coefficients du premier niveau sont les fréquences marginales $f(I)$ et $f(B)$, ceux du deuxième niveau les fréquences conditionnelles $f_I(E)$, $f_I(C)$, $f_B(E)$, $f_B(C)$;
– en terminale, il s'agit d'un arbre probabiliste, les coefficients du premier niveau sont les probabilités $P(I)$ et $P(B)$, ceux du deuxième niveau les probabilités conditionnelles $P_I(E)$, $P_I(C)$, $P_B(E)$, $P_B(C)$.
On peut aussi les traduire par un tableau d'effectifs, en supposant, par exemple, un effectif total de 1 000 messages entrants (il faut alors souligner pour les élèves que seules importent les proportions) :

	Indésirable	Bienvenu	Total
Éliminé	760	2	762
Conservé	40	198	238
Total	800	200	1 000

Ce tableau permet, sans écrire de formule, de répondre à la question posée :
$\frac{2}{762} = 0{,}003 = 0{,}3\%$.

Il permettrait d'ailleurs de construire complètement l'arbre dual.

Mobilité sociale

Les « tables de mobilité sociale » indiquent l'évolution de la répartition de la population en PCS (professions et catégories socioprofessionnelles) d'une génération à la suivante. On part de données statistiques telles que celles du tableau ci-dessous (enquête effectuée par l'INSEE en 1985 auprès des hommes de 40 à 59 ans actifs ou anciens actifs). Les effectifs sont en milliers : on lit, par exemple, en première colonne que 426 000 hommes agriculteurs ont été interrogés et que parmi eux, 381 300 avaient un père agriculteur, 16 200 un père artisan ou commerçant, etc.

Tables de mobilité sociale

PCS du fils PCS du père	Agriculteur	Artisan / Commerçant	Cadre / Intellectuel	Profession intermédiaire	Employé	Ouvrier	TOTAL
Agriculteur	381,3	99,2	56,5	135,4	76,7	379,0	**1 128,1**
Artisan / Commerçant	16,2	233,6	158,0	154,7	58,0	185,4	**805,9**
Cadre / Intellectuel	1,5	27,3	178,0	61,7	17,8	11,4	**297,7**
Profession intermédiaire	0,5	45,3	143,8	141,6	39,7	81,4	**452,3**
Employé	1,5	43,7	102,7	142,7	62,6	96,8	**450,0**
Ouvrier	25,0	175,0	137,0	392,0	182,0	872,0	**1 783,0**
TOTAL	**426,0**	**624,1**	**776,0**	**1 028,1**	**436,8**	**1 626,0**	**4 917,0**

On calcule les fréquences conjointes en divisant tous ces effectifs par 4 917 :

PCS du fils PCS du père	Agriculteur	Artisan / Commerçant	Cadre / Intellectuel	Profession intermédiaire	Employé	Ouvrier	TOTAL
Agriculteur	7,8 %	2,0 %	1,1 %	2,8 %	1,6 %	7,7 %	**22,9 %**
Artisan / Commerçant	0,3 %	4,8 %	3,2 %	3,1 %	1,2 %	3,8 %	**16,4 %**
Cadre / Intellectuel	0,0 %	0,6 %	3,6 %	1,3 %	0,4 %	0,2 %	**6,1 %**
Profession intermédiaire	0,0 %	0,9 %	2,9 %	2,9 %	0,8 %	1,7 %	**9,2 %**
Employé	0,0 %	0,9 %	2,1 %	2,9 %	1,3 %	2,0 %	**9,2 %**
Ouvrier	0,5 %	3,6 %	2,8 %	8,0 %	3,7 %	17,7 %	**36,3 %**
TOTAL	**8,7 %**	**12,7 %**	**15,8 %**	**20,9 %**	**8,9 %**	**33,1 %**	**100,0 %**

On reconstitue à partir des marges (par produit) le tableau théorique d'indépendance :

PCS du fils PCS du père	Agriculteur	Artisan / Commerçant	Cadre / Intellectuel	Profession intermédiaire	Employé	Ouvrier	TOTAL
Agriculteur	2,0 %	2,9 %	3,6 %	4,8 %	2,0 %	7,6 %	**22,9 %**
Artisan / Commerçant	1,4 %	2,1 %	2,6 %	3,4 %	1,5 %	5,4 %	**16,4 %**
Cadre / Intellectuel	0,5 %	0,8 %	1,0 %	1,3 %	0,5 %	2,0 %	**6,1 %**
Profession intermédiaire	0,8 %	1,2 %	1,5 %	1,9 %	0,8 %	3,0 %	**9,2 %**
Employé	0,8 %	1,2 %	1,4 %	1,9 %	0,8 %	3,0 %	**9,2 %**
Ouvrier	3,1 %	4,6 %	5,7 %	7,6 %	3,2 %	12,0 %	**36,3 %**
TOTAL	**8,7 %**	**12,7 %**	**15,8 %**	**20,9 %**	**8,9 %**	**33,1 %**	**100,0 %**

On rapporte le tableau réel des fréquences au tableau théorique d'indépendance[18] :

PCS du fils PCS du père	Agriculteur	Artisan / Commerçant	Cadre / Intellectuel	Profession intermédiaire	Employé	Ouvrier
Agriculteur	3,90	0,69	0,32	0,57	0,77	1,02
Artisan / Commerçant	0,23	2,28	1,24	0,92	0,81	0,70
Cadre / Intellectuel	0,06	0,72	3,79	0,99	0,67	0,12
Profession intermédiaire	0,01	0,79	2,01	1,50	0,99	0,54
Employé	0,04	0,77	1,45	1,52	1,57	0,65
Ouvrier	0,16	0,77	0,49	1,05	1,15	1,48

Les sous et surreprésentations apparaissent sous forme de coefficients inférieurs ou supérieurs à 1. Le sociologue dira par exemple « Il y a 3,9 fois plus d'agriculteurs qui ont un père agriculteur qu'on n'en obtiendrait par tirage au sort des professions des enfants » et pourra rapprocher la notion d'indépendance de celle d'égalité des chances.

18. La pratique usuelle en sociologie est de former les rapports entre fréquences observées et fréquences théoriques. Mais on pourrait aussi former les différences : c'est alors le signe de la différence qui indique les sous- et surreprésentations.

On peut aussi établir la « table de recrutement » et la « table de destinée » en calculant à partir du tableau initial les fréquences conditionnelles soit en colonne, soit en ligne :

Table de recrutement							
PCS du fils PCS du père	Agriculteur	Artisan/ commerçant	Cadre/ intellectuel	Profession intermédiaire	Employé	Ouvrier	TOTAL
Agriculteur	89,5 %	15,9 %	7,3 %	13,2 %	17,6 %	23,3 %	**22,9 %**
Artisan/ commerçant	3,8 %	37,4 %	20,4 %	15,0 %	13,3 %	11,4 %	**16,4 %**
Cadre/ intellectuel	0,4 %	4,4 %	22,9 %	6,0 %	4,1 %	0,7 %	**6,1 %**
Prof. intermédiaire	0,1 %	7,3 %	18,5 %	13,8 %	9,1 %	5,0 %	**9,2 %**
Employé	0,4 %	7,0 %	13,2 %	13,9 %	14,3 %	6,0 %	**9,2 %**
Ouvrier	5,9 %	28,0 %	17,7 %	38,1 %	41,7 %	53,6 %	**36,3 %**
TOTAL	**100,0 %**	**100,0 %**	**100,0 %**	**100,0 %**	**100,0 %**	**100,0 %**	**100,0 %**

Table de destinée							
PCS du fils PCS du père	Agriculteur	Artisan/ commerçant	Cadre/ intellectuel	Profession intermédiaire	Employé	Ouvrier	TOTAL
Agriculteur	33,8 %	8,8 %	5,0 %	12,0 %	6,8 %	33,6 %	**100,0 %**
Artisan/ commerçant	2,0 %	29,0 %	19,6 %	19,2 %	7,2 %	23,0 %	**100,0 %**
Cadre/ intellectuel	0,5 %	9,2 %	59,8 %	20,7 %	6,0 %	3,8 %	**100,0 %**
Prof. intermédiaire	0,1 %	10,0 %	31,8 %	31,3 %	8,8 %	18,0 %	**100,0 %**
Employé	0,3 %	9,7 %	22,8 %	31,7 %	13,9 %	21,5 %	**100,0 %**
Ouvrier	1,4 %	9,8 %	7,7 %	22,0 %	10,2 %	48,9 %	**100,0 %**
TOTAL	**8,7 %**	**12,7 %**	**15,8 %**	**20,9 %**	**8,9 %**	**33,1 %**	**100,0 %**

On peut les interpréter en termes de probabilités conditionnelles : on lit par exemple dans la table de recrutement que la probabilité, si on est agriculteur, d'avoir un père agriculteur est 89,5 % ; et dans la table de destinée que la probabilité, si on a un père agriculteur, d'être agriculteur est 33,8 %.

Qui regarde quoi ?

Exemple

On a posé à un groupe de 40 jeunes la question : « Regardez-vous les matches de football à la télévision ? » Les réponses sont les suivantes :

	OUI	NON
Garçons	20	4
Filles	10	6

On veut savoir si la réponse dépend du sexe de la personne interrogée.

En première, on peut utiliser le langage statistique (voir les thèmes d'étude en information chiffrée) :
– on divise tous les effectifs par l'effectif total, pour obtenir les fréquences conjointes ;
– on calcule les fréquences marginales par sommation des lignes et des colonnes ;
– on reconstitue, en multipliant les marges, le tableau de fréquences théoriques qui traduirait l'indépendance :
– on rapporte ce tableau au tableau réel : cela met en évidence les sous-représentations et surreprésentations.

En terminale, on peut utiliser le langage des probabilités, en considérant l'épreuve qui consiste à choisir au hasard un individu dans la population. La probabilité, si c'est un garçon, de répondre OUI est supérieure à la probabilité de répondre OUI ; la probabilité, si c'est une fille, de répondre OUI est inférieure à la probabilité de répondre OUI. Cela confirme la dépendance entre le sexe et la réponse mise en évidence ci-dessus avec le langage statistique. L'indépendance, quant à elle, s'écrirait $P_G(O)$ c'est-à-dire $P(O \cap G) = P(O)P(G)$: c'est la propriété du tableau des fréquences théoriques.

Il faut ici préciser que les conclusions ne concernent que le groupe de personnes étudié. Si l'on veut à partir de ce groupe inférer un jugement général sur l'attitude des garçons et des filles vis-à-vis des émissions de football, il faut considérer ce groupe comme un échantillon d'une population plus vaste. On doit alors se demander si cet échantillon est représentatif de la population, autrement dit si les 40 jeunes interrogés ont été choisis au hasard dans cette population[19] et dans l'affirmative, si l'écart entre les fréquences observées *fj* et les fréquences théoriques *pj* est significatif, c'est-à-dire si la fluctuation d'échantillonnage ne suffit pas à l'expliquer. L'étude correspondante dépasse le niveau de terminale STG.

19. Faute de quoi il pourrait y avoir un biais (par exemple si les jeunes interrogés étaient tous membres d'un club de football).

Fonctions numériques

Commentaires sur le programme

Le programme recommande de traiter des exemples simples issus des domaines du commerce, de la gestion, des sciences économiques et de l'administration, ce qui suggère de travailler en liaison avec les collègues enseignant l'économie et la gestion. Mais il n'est pas exclu d'aborder d'autres domaines si le professeur les juge accessibles et utiles.
Cependant, une difficulté de langage est à souligner lors du transfert aux autres disciplines : alors qu'en mathématiques, on éprouve le besoin de nommer le lien qui existe entre deux grandeurs, il est très rare qu'on le fasse dans les sciences appliquées. Ainsi l'économiste dit « la consommation est fonction du revenu », mais n'éprouve pas le besoin d'écrire $C = f(R)$. Ou alors il écrit $C = C(R)$: c'est plus économique (!), puisqu'il n'a pas besoin de la lettre f ; mais cela identifie la fonction et l'image, ce qui peut générer chez les élèves de graves confusions. Ainsi, beaucoup d'élèves ne se rendent pas compte que les fonctions sont omniprésentes dans les sciences appliquées, notamment parce qu'ils ne les voient pas écrites !
Plutôt que d'adopter l'écriture $C = C(R)$, il est donc souhaitable que le professeur de mathématiques explicite la fonction en écrivant $C = f(R)$.

Classe de première

L'objectif essentiel est la bonne compréhension du concept de fonction ce qui, en général, est loin d'être acquis en fin de seconde.
La notion capitale de sens de variation est souvent mal comprise. Des phrases simples peuvent permettre d'assimiler la définition : « Une fonction croissante conserve le sens des inégalités ; une fonction décroissante renverse le sens des inégalités. » L'interprétation graphique est indispensable mais n'explique pas pour quelle raison cette notion est importante. Comme en seconde, il faut multiplier les exemples où une fonction relie deux grandeurs variant soit dans le même sens, soit en sens opposés :
– l'impôt est fonction croissante du revenu ;
– la pression atmosphérique est fonction décroissante de l'altitude ;
– le coût total de production est fonction croissante de la quantité produite ;
– la demande est généralement fonction décroissante du prix unitaire ;
– la taille d'un enfant est fonction croissante de son âge, etc.

Fonctions de référence

Les fonctions affines, ainsi que les fonctions « carré » et « inverse », ont été vues en seconde. On leur adjoint en première les fonctions « cube » et « racine carrée ». Elles constituent les « briques » de l'analyse, en ce sens que les fonctions usuelles sont fabriquées à partir de celles-là[1].
Pour leur sens de variation, il est souhaitable de ne pas se limiter à une observation graphique, mais de démontrer effectivement la croissance ou la décroissance sur les intervalles où elles sont monotones, en revenant (pour ces fonctions de référence) aux définitions. En effet :
– cela permet de pratiquer les inégalités, et notamment la méthode importante « pour comparer deux nombres on peut étudier le signe de leur différence » ;

1. Les fonctions sinus et cosinus ont été vues en seconde. Les fonctions logarithmes et exponentielles seront abordées en terminale.

– cela donne un nouvel éclairage aux constats du type « deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre », « deux nombres de même signe et leurs inverses sont rangés dans l'ordre inverse » ;
– cela montre que la définition est opératoire : on peut étudier le sens de variation sans disposer de la courbe, qui d'ailleurs à elle seule ne permet pas de conclure (voir ci-après) ;
– cela montre aussi que sa mise en œuvre n'est pas simple, et sera même difficile avec des fonctions un peu élaborées ; ce qui doit motiver la recherche d'une méthode autre que la définition (méthode qui sera vue en terminale).

Exemples de problèmes mettant en jeu des fonctions simples

L'apparition des calculatrices graphiques et des tableurs a complètement renouvelé la problématique de l'étude des fonctions. Alors qu'autrefois la courbe apparaissait comme l'aboutissement de l'étude, elle peut désormais en constituer la première étape.
Mais cela suppose pour l'élève des compétences spécifiques :
– sur calculatrice : savoir entrer une fonction, la tabuler, choisir une fenêtre adaptée pour la représenter ;
– sur tableur : savoir entrer une formule, la recopier, construire un graphique.
Ces compétences n'ont rien d'immédiat et demandent par conséquent un apprentissage, trop souvent négligé. Précisons que cela représente pour l'enseignant des difficultés concrètes :
– pour la calculatrice, on a déjà évoqué à propos des statistiques le problème de la diversité des modèles ;
– pour le tableur, l'accès régulier en petit effectif à une salle d'informatique fiable n'est pas toujours possible.
Une deuxième étape consiste à interpréter les informations de la calculatrice ou du tableur : images, antécédents, signe, sens de variation, extrema. Ces notions ont été introduites en seconde mais sont loin d'être maîtrisées en première, surtout dans une section non scientifique. Passer du cadre graphique au cadre numérique et inversement (comparer une table de valeurs et une courbe, placer des points, lire des images et des antécédents,lire un sens de variation, repérer un extremum…) permet la maturation de ces notions.
Il importe aussi de leur donner du sens, en les ancrant dans des situations concrètes : un élève de première STG doit pouvoir expliquer pour quelles raisons une fonction de coût total est nécessairement croissante ; l'utilité de rechercher le minimum du coût moyen ; d'étudier le signe d'un résultat d'exploitation, d'en rechercher le maximum mais aussi l'intérêt de comparer une fonction d'offre et une fonction de demande.
Une fois ces compétences acquises, une troisième étape consiste pour l'élève à comprendre que si ce qu'il voit à l'écran permet des conjectures, cela ne suffit pas à démontrer les propriétés de la fonction. Et ceci pour au moins trois raisons, qu'on peut résumer par trois mots, approximation, interpolation, extrapolation :
– approximation : les valeurs calculées sont nécessairement arrondies[2]. Ainsi un maximum qui semble égal à 2 peut être en réalité $\frac{31}{16}$, ce qui change tout quant au nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1{,}95$;
– interpolation : la calculatrice utilise un pas de tabulation ; elle ne peut donc rien indiquer de ce qui se passe entre deux valeurs calculées[3]. Par exemple l'observation sur $[-5 ; 5]$ de la fonction $x \mapsto x^2 + \frac{\sin(10\pi x)}{10}$ suggère un tableau de variation faux ;
– extrapolation : une représentation nécessairement bornée ne dit rien de ce qui se passe en dehors de la fenêtre de visualisation. Par exemple l'observation sur $[-5 ; 5]$ de la fonction $x \mapsto x^2 - \frac{x^4}{1000}$ suggère un tableau de variation faux.
Cette prise de conscience est décisive pour motiver la recherche ultérieure de méthodes autres que graphiques, principalement la dérivation.

2. À cet arrondi numérique se superpose pour la courbe un arrondi graphique dû à la discrétisation de l'écran en pixels.
3. Ici encore la discrétisation de l'écran se superpose à la discrétisation du calcul.

On note au passage le danger de certaines pratiques sommaires du type : « Placer quelques points puis compléter la courbe et en déduire le tableau de variation sur R. » Le professeur doit être conscient qu'il ne s'agit que de conjectures.
Pour faciliter la liaison avec les autres disciplines, il est possible d'utiliser le mot « graphe » comme abréviation de « représentation graphique » : c'est le terme employé par de nombreux utilisateurs. Ce petit abus de langage, qui revient à identifier un point avec le couple de ses coordonnées, est acceptable car il ne prête pas à confusion.
Il n'y a pas lieu de soulever des difficultés à propos de l'ensemble de définition. Cela n'empêche pas de se poser des questions du genre : « Peut-on toujours calculer $\frac{1}{x-5}$? » pour identifier les éventuelles valeurs de la variable qui n'ont pas d'image[4]. Cela permet par exemple de faire comprendre qu'une fonction homographique n'est pas monotone sur son ensemble de définition et que sa courbe a deux branches.
Pour les équations et inéquations, on rencontre très souvent les formes $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$: par différence, on les ramène aux formes indiquées dans le programme : $h(x) = 0$, $h(x) < 0$, $h(x) > 0$.

Nombre dérivé et tangente

On se contente en première STG d'introduire le nombre dérivé, dont la compréhension nécessite une longue maturation. La fonction dérivée sera traitée en classe terminale. Le passage du nombre $f'(x)$ à la fonction f' présente en effet des obstacles, notamment l'absence de tracé de courbe pour cette nouvelle fonction. Néanmoins, le terrain sera préparé par les formules concernant les fonctions de référence et les fonctions trinômes du second degré, et par l'observation du signe du nombre dérivé.
Certains logiciels comme *Geoplan* (CREEM) permettent d'introduire de façon visuelle le nombre dérivé, en « zoomant » autour d'un point, ou de faire déplacer une tangente le long d'une courbe en affichant son coefficient directeur.
On peut signaler que le nombre dérivé n'existe pas toujours, soit qu'il n'y ait pas de tangente, soit que la tangente soit parallèle à l'axe des ordonnées. Mais il n'y a pas lieu de s'étendre davantage sur la notion de dérivabilité.
Par ailleurs, il faut savoir que de nombreux utilisateurs utilisent la notation de Leibniz $\frac{dy}{dx}$, et que la plupart ignorent l'expression « nombre dérivé ». Cela ne facilite pas les transferts, et appelle encore une fois une concertation entre le professeur de mathématiques et le professeur d'économie-gestion[5].
Le programme cite une illustration de la notion de nombre dérivé : le coût marginal. Rappelons que si $f(q)$ désigne le coût total de production d'une quantité q, le coût marginal est le nombre $f'(q)$. Les économistes l'interprètent comme le coût de production de la dernière unité produite ou d'une unité supplémentaire. Cela revient à identifier localement le graphe de f avec sa tangente, ce qui est justifié si q est assez grand et f assez régulière (voir ci-après « Approfondissements pour le professeur »).
Pour l'équation de la tangente, la formule générale $y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$ peut être démontrée si le niveau de la classe le permet, mais elle n'est pas exigible des élèves. En revanche, ils doivent savoir la retrouver sur des exemples numériques, le nombre $f'(x_A)$ étant donné soit numériquement, soit littéralement, soit graphiquement (la tangente passant par des points clairement identifiables).
En ce qui concerne les fonctions de référence « carré », « inverse », « cube », « racine carrée », on admet les formules $2x_A$, $-\frac{1}{x_A^2}$, $3x_A^2$ et $\frac{1}{2\sqrt{x_A}}$ donnant le nombre dérivé en x_A.
Il est recommandé de les tester sur grapheur ou calculatrice pour quelques valeurs de x_A: l'observation de la droite passant par le point $A\ (x_A\ ;\ f(x_A))$ et ayant ce coefficient directeur permet de construire le sens de la notion de tangente en A à la courbe. On peut exploiter les propriétés de symétrie des trois premières courbes pour comparer les tangentes en des points d'abscisses opposées.
On fait le même travail avec les fonctions polynômes du second degré, en admettant que si $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors $f'(x_A) = 2ax_A + b$.

4. L'expression « valeur sans image » peut être plus claire que « valeur interdite ».
5. C'est surtout après le baccalauréat que la notation de Leibniz sera utilisée en économie et en gestion.

La tangente en A représente une fonction affine dite approximation affine de f au voisinage de x_A. Ce langage montre que la recherche d'une tangente n'est pas seulement un problème de géométrie : approcher localement la courbe par une droite revient à approcher localement la fonction par une fonction affine. Par exemple pour x voisin de 1, $x^2 \approx 2x-1$, $\frac{1}{x} \approx 2-x$, $x^3 \approx 3x-2$, $\sqrt{x} \approx \frac{x+1}{2}$. Cela permettra en terminale d'expliquer certaines propriétés des petits taux d'évolution : pour t proche de 0, $(1+t)^2 \approx 1+2t$, $\frac{1}{1+t} \approx 1-t$, $(1+t)^3 \approx 1+3t$, $\sqrt{1+t} \approx 1+\frac{t}{2}$.
Pour préparer le terrain en première, on propose de calculer mentalement $\frac{1}{1{,}03}$, $\sqrt{0{,}98}$ ou $1{,}01^3$ et comparer la valeur obtenue avec celle que donne la calculatrice ; ou poser de petits exercices du genre : on suppose que $f(3) = 5$ et $f'(3) = 2$; trouver une valeur approchée de $f(3{,}02)$, de $f(2{,}99)$…
Pour le signe des nombres dérivés, on se contente d'observer et d'admettre que si f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle, alors les nombres dérivés sont positifs (respectivement négatifs) sur cet intervalle. De façon imagée : « Si la courbe monte, toutes les tangentes montent. Si la courbe descend, toutes les tangentes descendent. » Le théorème réciproque relève du programme de terminale (où il sera également admis).

Classe terminale

Fonction dérivée

Le nombre dérivé a été défini en classe de première et les formules permettant de le calculer ont été admises pour les fonctions de référence et les fonctions trinômes du second degré. En classe terminale, un statut est attribué à ces formules en définissant la fonction dérivée, et on se donne les moyens de calculer certaines fonctions dérivées.
À propos des primitives, il s'agit simplement de disposer d'un mot pour désigner la fonction que l'on a dérivée. Cela permet par exemple d'énoncer : « Le signe de la fonction dérivée indique le sens de variation de la fonction primitive. »
On ne soulève aucun problème sur l'existence des primitives d'une fonction donnée. Mais on peut objecter que deux fonctions ayant la même dérivée sur un intervalle diffèrent d'une constante.
Il est souhaitable, pour « donner un visage » à la fonction dérivée, de procéder à un ou deux exercices dans lesquels sont comparés le graphe de la fonction dérivée et celui de la fonction primitive.
Les théorèmes de dérivation d'une somme, d'un produit, d'un quotient sont admis : ils permettront le calcul de dérivées des fonctions usuelles, essentiellement les fonctions polynômes et rationnelles, auxquelles s'adjoindront les fonctions logarithme et exponentielles.
Pour une fonction composée, la notation $v \circ u$ n'est pas exigible. On peut utiliser l'expression « composée de u suivie de v » et énoncer : si $f(x) = v(u(x))$, alors $f'(x) = v'(u(x))\, u'(x)$.
Ce théorème de dérivation d'une fonction composée s'appliquera à diverses familles de fonctions tout au long de l'année :
– $x \mapsto \ln(ax) - \ln(x)$ pour démontrer que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$;
– $x \mapsto \ln(ax+b)$;
– $x \mapsto \ln(\exp(x))$ pour découvrir la dérivée de la fonction exp ;
– $x \mapsto e^{ax+b}$;
– $x \mapsto a^x$, *via* l'écriture $e^{x\ln(a)}$.
Le théorème associant le signe du nombre dérivé au sens de variation de la fonction primitive a été vu en première. En terminale, on énonce le théorème réciproque, toujours à l'aide d'une justification graphique.
Ce théorème ramène l'étude du sens de variation à une étude de signe. Pour que les élèves soient convaincus de son intérêt, il faut :
– d'une part, qu'ils aient compris ce qu'est le sens de variation d'une fonction, qu'ils le distinguent de son signe et qu'ils saisissent l'utilité de l'étudier ;
– d'autre part, qu'ils soient plus performants dans l'étude d'un signe que dans l'étude directe d'un sens de variation.
En principe, le travail effectué en classe de première a permis de franchir ces deux étapes.

Fonction logarithme népérien

La définition peut être introduite à partir du problème historique auquel se sont attelés au XVIe siècle des hommes comme Chuquet, Stifel, Neper, Briggs, Bürgi, pour les besoins de l'astronomie et de la navigation : simplifier les calculs en remplaçant les multiplications par des additions (et donc les divisions par des soustractions, les élévations de puissances par des multiplications, les extractions de racines par des divisions simples). Cela revient[6] à rechercher une fonction f telle que $f(ab) = f(a) + f(b)$ pour tous nombres réels strictement positifs a et b.
Une telle fonction doit vérifier :
– d'une part $f(1) = 0$, puisque $f(1) = f(1) + f(1)$;
– d'autre part, $f(ax) = f(a) + f(x)$ d'où en supposant f dérivable : $af'(ax) = f'(x)$ donc $af'(a) = f'(1)$, soit $f'(x) = \frac{k}{x}$ en posant $k = f'(1)$.
La définition retenue consiste à choisir la plus simple des fonctions possibles : celle pour laquelle $k = 1$. On admet qu'il en existe une, définie sur $]0 ; +\infty[$.
L'avantage de cette définition est qu'elle permet de démontrer facilement les propriétés utiles, qu'elles soient algébriques ou analytiques.
Un usage ancien consiste à noter $\ln x$ le logarithme népérien de x : on lui préfèrera la notation $\ln(x)$, notation standard pour l'image d'un nombre par une fonction, qui est utilisée par les calculatrices et les ordinateurs, et qui évite certaines erreurs (par exemple simplifier $\frac{\ln x}{\ln 2}$) et certaines ambiguïtés (par exemple l'interprétation de $\ln 2x$ ou $\ln x^2$).
Dans le même ordre d'idées, il faut rappeler que si u désigne une fonction, l'écriture $\ln u$ désigne en principe le produit de ln par u et non la composée, qui se note $\ln \circ u$. Cette dernière écriture n'est pas exigible en STG ; on peut énoncer par exemple :
si $f(x) = \ln(u(x))$ alors $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$. Notons au passage qu'il n'est pas exigible de savoir dériver une fonction de la forme $x \mapsto \ln(|u(x)|)$.

Exposants réels

Définir d'abord a^b dans le cas général permet de se familiariser avec les exposants réels à l'aide de leurs propriétés algébriques ; cela rend naturelle ensuite la notation e^x.
On doit admettre que tout réel admet un antécédent par ln ; l'unicité de cet antécédent est immédiate puisque $\ln(a) = \ln(b)$ implique $a = b$.
Toutes les propriétés algébriques des exposants réels se démontrent facilement. C'est l'occasion de refaire pratiquer les exposants entiers, et de revoir sous un nouvel éclairage les propriétés des radicaux.
L'égalité $x^n = k$ (pour n nombre entier naturel non nul et k nombre réel strictement positif) implique $(x^n)^{1/n} = k^{1/n}$ donc $x = k^{1/n}$. Réciproquement l'égalité $x = k^{1/n}$ implique $x^n = (k^{1/n})^n$ donc $x^n = k$. Finalement le nombre $k^{1/n}$ est la seule solution positive de l'équation $x^n = k$. Seul ce résultat est exigible : cela n'empêche pas, pour les petites valeurs de n, de discuter l'équation $x^n = k$ dans R pour k quelconque, pour différencier le cas n pair du cas n impair.
Une application importante est la recherche de la moyenne géométrique de n nombres réels positifs. Cela permet notamment de trouver le taux d'évolution moyen lors de plusieurs évolutions successives (voir « Information chiffrée »).

Fonctions exponentielles

On veillera à établir le lien entre la fonction $x \mapsto a^x$ et la suite $n \mapsto a^n$. Les fonctions exponentielles fournissent un modèle continu là où les suites géométriques fournissent un modèle discret. On parle indifféremment de croissance (décroissance) exponentielle ou de croissance (décroissance) géométrique.
On aurait pu d'ailleurs introduire les fonctions exponentielles par cette entrée. Cela revient à chercher les fonctions qui transforment les sommes en produits, et donc une suite arithmétique en suite géométrique[7]. On peut alors entre a^n et a^{n+1} intercaler leur moyenne géométrique, qui doit être l'image de $n + 0{,}5$. En itérant le procédé, on peut introduire a^x pour des valeurs non entières[8] de x.

6. Bien entendu, ni le langage ni la méthode exposés ci-après n'étaient les leurs.
7. Cela rejoint la démarche de Stifel, Neper ou Briggs.
8. Les nombres dyadiques, denses dans R.

Approfondissements pour le professeur

Offre et demande

Les premiers économistes (Cantillon, Quesnay, Smith…), cherchant à expliquer comment se fixe le prix d'un produit sur un marché, ont observé que les consommateurs demandaient une certaine quantité de ce produit (la quantité demandée ou demande) ; et que les producteurs proposaient une certaine quantité de ce produit (la quantité offerte ou offre).

On suppose en général que la quantité demandée est fonction du prix unitaire p du produit : $q = f(p)$, la fonction f étant décroissante, puisqu'une augmentation du prix unitaire entraîne une diminution de la demande.

On suppose aussi que la quantité offerte est fonction du prix unitaire p du produit : $q = g(p)$, la fonction g étant croissante, puisqu'une augmentation du prix unitaire entraîne une augmentation de l'offre.

Sur un marché concurrentiel, si les quantités sont rigides, le prix est alors progressivement ajusté par les producteurs pour aboutir à un prix d'équilibre pour lequel l'offre est égale à la demande.

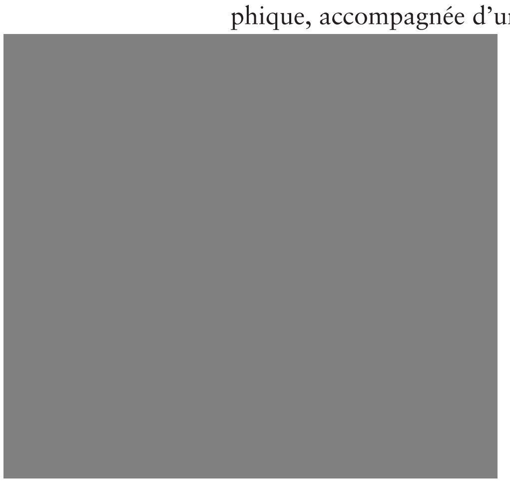
Ce modèle est, bien entendu, trop sommaire pour rendre compte des comportements des consommateurs et des producteurs sur n'importe quel marché et pour n'importe quel produit. Mais il constitue le point de départ des théories classiques et néoclassiques (ce qu'on appelle aujourd'hui la « microéconomie »).

Pour exploiter ce modèle, on pourra varier les types de fonctions pour f et g : en première des fonctions affines, polynôme du second degré, homographiques ; en terminale des fonctions logarithmiques ou exponentielles. Bien entendu, on veillera à ce que sur l'intervalle de prix envisagé, les fonctions f et g soient toutes les deux positives, l'une étant décroissante, l'autre croissante.

La représentation, parfois rencontrée en économie, des fonctions d'offre et de demande en portant q en abscisse et p en ordonnée ne facilite pas les transferts d'une discipline à l'autre.

Comparaison entre graphique et formule

On propose aux élèves l'expression de deux fonctions, l'une affine et l'autre homographique, accompagnée d'un graphique tel que celui qui est représenté ci-contre.



Les deux fonctions représentent l'offre et la demande d'un produit banal[9] sur un marché concurrentiel.

Le travail consiste à :
– repérer (en justifiant) quelle est la fonction d'offre et quelle est la fonction de demande,
– déterminer les intervalles de définition de ces fonctions ;
– graduer les axes ;
– déterminer graphiquement le prix d'équilibre ;
– le vérifier par le calcul ;
– comparer les deux fonctions, en interprétant en termes économiques.

L'objectif est de réviser en début de première, dans un contexte leur donnant du sens, les notions de base concernant les fonctions : image, antécédent, graphe, signe d'une fonction, sens de variation, comparaison de fonctions. On joue pour cela sur trois cadres : algébrique, graphique, économique.

La résolution fait appel aux raisonnements suivants :
– la fonction d'offre est croissante, elle est donc représentée par la courbe montante ; or celle-ci est une droite ; donc la fonction d'offre est affine ;
– les prix et les quantités sont positifs, ce qui se lit sur le graphique, mais, en l'absence de graduations, cela impose de résoudre deux inéquations ;
– les calculs précédents ont fourni les coordonnées de quelques points, ce qui permet de retrouver les unités sur chaque axe ;

9. *A contrario*, pour un produit de luxe, ce modèle pourrait ne pas être pertinent.

– une demande inférieure à l'offre caractérise la surproduction, une demande supérieure à l'offre caractérise la pénurie. Cela montre l'intérêt de comparer deux fonctions. La résolution algébrique de l'inéquation n'étant pas accessible en première STG, on la traite graphiquement.

Exemple

$f(p) = \frac{10\,000 - 1000p}{p+2}$; $g(p) = 500p - 1000$

Utilisation de la calculatrice graphique, changements de cadres : graphique, algébrique, fonctionnel

On propose aux élèves l'expression d'une fonction d'offre et d'une fonction de demande, par exemple, une fonction affine et une fonction trinôme.
Le travail consiste à :
– représenter ces deux fonctions à la calculatrice dans une fenêtre adaptée ;
– étudier leur sens de variation et à l'interpréter en termes économiques ;
– déterminer graphiquement le prix d'équilibre et la quantité échangée à ce prix ;
– vérifier par le calcul la valeur trouvée ;
– comparer les deux fonctions et les interpréter en termes économiques.
L'objectif, ici, est encore de manipuler les notions de base concernant les fonctions, notamment le sens de variation en utilisant la calculatrice graphique, ce qui suppose de savoir entrer une fonction et la représenter.
Il est essentiel bien sûr que les deux fonctions soient positives sur l'intervalle de prix considéré, l'une étant croissante et l'autre décroissante.
Pour la vraisemblance des prix et des quantités, on peut être conduit à ce que certains coefficients soient de grands nombres et d'autres de petits nombres. Cela impose, au début, une réflexion pour choisir une fenêtre adaptée : il est utile au préalable de calculer les valeurs extrêmes de chaque fonction.
Dans la suite, on confronte les trois cadres : graphique, algébrique, économique. L'étude algébrique du sens de variation est calquée sur le raisonnement économique : si le prix p_1 est inférieur au prix p_2, alors, d'une part, l'offre au prix p_1 est inférieure à l'offre au prix p_2, d'autre part, la demande au prix p_1 est supérieure à la demande au prix p_2.
On pourrait demander d'abord de résoudre algébriquement l'équation (en guidant éventuellement la résolution), puis de vérifier le résultat à l'aide de la commande « trace » de la calculatrice.

Exemple

Pour des quantités exprimées en tonnes et un prix unitaire en euros compris entre 1 000 et 5 000, on suppose que $f(p) = -0{,}001p^2 - 3p + 46\,000$ et $g(p) = 5p - 2\,000$.

Coût de production, chiffre d'affaires, résultat d'exploitation

On considère une entreprise produisant au cours d'une période donnée une quantité q d'un certain produit.
Le coût total de fabrication est fonction de la quantité produite : $C = f(q)$.
La fonction f est nécessairement positive, avec $f(0) > 0$: en effet $f(0)$ est le coût fixe, incompressible même en l'absence de production (locations, équipements, amortissements…). Le coût variable $f(q) - f(0)$ quant à lui fait intervenir les matières premières et le travail.
La fonction f est aussi croissante : si $q_2 > q_1$, pour produire q_2 il a fallu déjà produire q_1, donc $f(q_2) \geq f(q_1)$.
Si on suppose f dérivable[10], le nombre $f'(q)$ est le coût marginal d'une production q. Cette notion permet une réflexion sur le sens du nombre dérivé. Les économistes l'interprètent, en effet, comme le coût de production d'une unité supplémentaire ou le coût de la dernière unité produite : cela revient à identifier $f'(q)$ à $f(q+1) - f(q)$ ou à $f(q) - f(q-1)$.

10. La dérivabilité de f est une hypothèse forte. Par exemple pour une entreprise de transport (car, train, avion), q désignant le nombre de voyageurs, une fonction en escalier paraît plus appropriée (tant qu'on n'a pas rempli un car, le coût d'un voyageur supplémentaire est nul). Et si q ne prend que des valeurs entières, on peut préférer une suite.

Cette approximation est justifiée si q est assez grand et f assez régulière : elle consiste alors à identifier localement le graphe de f avec sa tangente (voir ci-desous).
Dans certains énoncés, on exprime les quantités en milliers ou les coûts en milliers (ou millions) pour être en phase avec la réalité économique. Néanmoins, cette pratique rend plus difficile l'interprétation du coût marginal, ainsi que celle du coût moyen unitaire (voir ci-dessous).

Minimisation du coût moyen

Un objectif essentiel pour l'entreprise est de minimiser le coût moyen unitaire $\frac{C}{q}$. En effet, ce coût moyen unitaire doit impérativement être inférieur au prix de vente unitaire p pour que l'entreprise puisse espérer faire du profit.
La théorie classique fait l'hypothèse des rendements décroissants : à partir d'un certain seuil, le coût marginal augmente quand la quantité augmente[11]. Autrement dit f' est croissante (f est convexe) sur un intervalle $[q_o ; +\infty]$.
Sous cette hypothèse, le coût moyen est minimal sur cet intervalle quand il est égal au coût marginal.
En effet si on pose $g(q) = \frac{f(q)}{q}$, la condition $g'(q) = 0$ équivaut à $f'(q) = \frac{f(q)}{q}$.
Pour q vérifiant cette condition, $g''(q) = \frac{f''(q)}{q} > 0$, ce qui montre qu'il s'agit d'un minimum.
Ce théorème a une interprétation graphique intéressante : sur le graphe de f, appelons M le point d'abscisse q et d'ordonnée C. Le coût moyen unitaire $\frac{C}{q}$ est le coefficient directeur de la droite (OM). La fonction f étant convexe, il est minimal quand cette droite est tangente à la courbe ; c'est-à-dire quand $f'(q) = \frac{f(q)}{q}$.

Réalisation d'un profit

Sous l'hypothèse de concurrence pure et parfaite, le prix de vente unitaire p est imposé à l'entreprise par le marché et à ce prix elle vend toute sa production.
Le chiffre d'affaires, autrement dit la recette générée par les ventes, est alors pq. La fonction linéaire $q \mapsto pq$ est représentée par une droite qu'on peut appeler droite de recette.
L'entreprise réalise un profit quand $pq > f(q)$, ce qui équivaut à $\frac{f(q)}{q} < p$.
La comparaison entre pq et $f(q)$ peut se faire :
– numériquement (au tableur ou à la calculatrice) ;
– graphiquement, en comparant le graphe de f avec la droite de recette ;
– algébriquement, en étudiant le signe du résultat d'exploitation $h(q) = pq - f(q)$.
On obtient ainsi l'intervalle de rentabilité, dans lequel le résultat d'exploitation est positif (c'est alors un profit).
En dehors de cet intervalle, il est négatif (c'est une perte) : la quantité produite est trop faible pour amortir le coût fixe ou trop élevée entraînant l'explosion des coûts variables.

Maximisation du profit

Sous les deux hypothèses ci-dessus, le profit est maximal quand le coût marginal est égal au prix de vente.
En effet le profit est $h(q) = pq - f(q)$. Donc $h'(q) = p - f'(q)$. Par suite $h'(q) = 0$ quand $f'(q) = p$.
Et $h''(q) = - f''(q) < 0$, ce qui montre qu'il s'agit d'un maximum.

11. Cette hypothèse, assez naturelle pour les activités du secteur primaire (agriculture, pêche, mines) l'est beaucoup moins pour les secteurs secondaire (industrie) ou tertiaire (services).

Graphiquement, cela signifie qu'au point correspondant sur le graphe de f, la tangente est parallèle à la droite de recette.
On voit que ce modèle illustre des notions clés de « l'analyse » (signe d'une fonction, sens de variation, nombre dérivé, minimum, maximum…) en leur donnant du sens.
Toutefois, il faut savoir que ces hypothèses (dérivabilité de f, rendements décroissants, concurrence pure et parfaite) paraissent aujourd'hui peu conformes à la réalité économique.
Le modèle exposé ci-dessus n'est bien entendu pas le seul possible :
– ainsi on peut remettre en cause l'hypothèse des rendements décroissants. Si f est concave (coût marginal décroissant), le coût moyen est décroissant mais n'a pas de minimum : l'entreprise a intérêt a produire le plus possible, à condition de pouvoir vendre toute sa production. On peut déterminer le seuil de rentabilité, c'est-à-dire la quantité minimale à vendre pour réaliser un profit ;
– un cas particulier important, étudié en gestion, est celui du coût marginal constant. La fonction de coût total est alors affine : $C = C_o + aq$, et le coût marginal a s'identifie au coût variable unitaire. Le coût moyen unitaire s'écrit $\frac{C_o}{q} + a$: il diminue quand la quantité produite augmente, mais reste minoré par a ;
– on peut aussi envisager le cas d'une entreprise en situation de monopole. C'est alors la confrontation entre le coût total de production $C = f(q)$ et la demande globale des consommateurs $q = d(p)$ qui détermine le prix de vente unitaire et la quantité à produire : pour un prix unitaire p, la quantité à produire est $d(p)$, donc le chiffre d'affaires $pd(p)$, le coût total $f(d(p))$ et le résultat d'exploitation $h(p) = pd(p) - f(d(p))$.
Le signe de h fournit les prix de vente (et donc les quantités) permettant un profit.
Le sens de variation de h permet de déterminer le meilleur prix de vente et donc la quantité à produire.
Pour exploiter le modèle ci-dessus en première, on peut envisager pour f une fonction polynôme du second degré $q \mapsto aq^2 + bq + c$. Il est impératif alors que les trois nombres a, b et c (donnés bien sûr numériquement) soient strictement positifs : les deux premiers pour que f soit croissante sur $[0 ; +\infty]$, le troisième pour que $f(0) > 0$.
Le coût moyen minimal, atteint quand $q = \sqrt{\frac{c}{a}}$, vaut $b + 2\sqrt{ac}$. Il faut que le prix de vente unitaire p soit supérieur à cette valeur pour que l'entreprise puisse espérer du profit.
Le résultat d'exploitation s'écrit $h(q) = -aq^2 + (p - b)q - c$. Son écriture factorisée fournit l'intervalle de rentabilité. Son écriture canonique montre que le profit maximal est atteint quand $q = \frac{p-b}{2a}$.
Notons que si on envisageait un p variable (ce qui n'est pas souhaitable en première ou terminale STG), cette dernière expression définirait la fonction d'offre de l'entreprise pour le produit considéré.

TP avec tableur (première)

On donne une fonction de coût total f de la forme $f(q) = aq^2 + bq + c$ (avec a, b, c positifs donnés numériquement).

1. On demande d'étudier la fonction f, c'est-à-dire :
– d'afficher au tableur les valeurs de q et de $f(q)$ sur deux colonnes ;
– de représenter la fonction f à l'aide du tableur ;
– de conjecturer puis de démontrer son sens de variation et de l'interpréter en termes économiques ;
– de démontrer que la tangente au point d'abscisse $\sqrt{\frac{c}{a}}$ passe par l'origine.

2. On demande d'étudier le coût moyen unitaire $g(q) = \frac{f(q)}{q}$, c'est-à-dire :
– de faire apparaître en 3e colonne le coût moyen unitaire ;
– d'interpréter $g(q)$ comme le coefficient directeur de la droite (OM), où M est le point d'abscisse q sur la courbe de f ;
– d'en déduire graphiquement le coût moyen minimal.

3. On donne le prix de vente unitaire (supérieur au coût moyen minimal), et on demande :
– de faire apparaître en 4e colonne le chiffre d'affaires $g(q)$;
– de recommencer un graphique comportant les graphes de f et g dans le même repère ;
– de comparer, le chiffre d'affaires et le coût total de production, numériquement, graphiquement et économiquement.

4. On définit le résultat d'exploitation $h(q) = g(q) - f(q)$. On demande :
– de faire apparaître en 5e colonne le résultat d'exploitation ;
– de représenter la fonction h ;
– de conjecturer et d'interpréter son signe numériquement, graphiquement et économiquement ;
– de déterminer, numériquement, graphiquement et éventuellement algébriquement, le profit maximal et la quantité à produire pour le réaliser.

L'objectif est de donner du sens à la notion de fonction et à celles qui s'y rapportent : signe d'une fonction, comparaison de fonctions, sens de variation, tangente, minimum, maximum.
On privilégie l'approche numérique (table de valeurs) et graphique (courbe), mais pour « démontrer » on fait appel, quand on le peut, au calcul algébrique.
Le tableur peut être remplacé par la calculatrice. Sur calculatrice, la tabulation de la fonction permet ensuite le choix de la fenêtre graphique la mieux adaptée (ce que le tableur réalise automatiquement).
Le choix d'écrire d'emblée $f(q)$, $g(q)$, $h(q)$ permet d'éviter les périphrases définissant les fonctions f, g, h, et de se placer dans l'environnement familier du cours de mathématiques (on pourrait aller encore un peu plus loin en remplaçant la lettre q par la lettre x dans tout l'énoncé). Mais reconnaissons que cela court-circuite un des objectifs de l'apprentissage : savoir passer de formules telles que $CT = q^2 + 3\ 600$, $CA = 150q$, $RE = CA - CT$ à des écritures fonctionnelles. Donner un nom à une fonction qui n'est pas nommée dans l'énoncé est très difficile pour des élèves de première. Cette compétence serait pourtant le signe d'une vraie compréhension du concept de fonction.
Au 1, l'interprétation économique doit éclairer le raisonnement algébrique : si $q_2 > q_1$ alors pour produire q_2 il a déjà fallu produire q_1, donc le coût de production de q_2 est nécessairement supérieur ou égal à celui de q_1. La dernière question du 1. vise à préparer la fin du 2…
Le 2 permet de distinguer sécante et tangente, et donne de leur coefficient directeur une interprétation économique simple, qui contient un enjeu : la rentabilité de l'entreprise. La fin du 2 montre la raison pour laquelle, quand le coût moyen est minimal, il est égal au coût marginal.
Au 3, l'énoncé doit supposer explicitement que tout ce qui est produit est vendu. La fonction g est alors linéaire : le chiffre d'affaires est proportionnel à la quantité produite.
Au 4, c'est l'occasion de rappeler une méthode souvent efficace pour comparer deux nombres (ici la recette totale et le coût total) : former leur différence et étudier son signe. Si $h(q)$ est positif c'est un profit, s'il est négatif c'est une perte. On retrouve le 3.
Pour maximiser h, il se peut que le pas choisi pour les valeurs de q ne soit pas assez fin : on ressent ainsi les limites de l'exploration numérique et donc la nécessité d'une méthode plus performante. Mais on peut aussi tabuler avec un pas plus fin.
On peut aussi guider un raisonnement algébrique fondé sur la forme canonique.
On peut constater qu'au point obtenu, la tangente est parallèle à la droite qui représente g. Autrement dit, le coût marginal est égal au prix de vente.
On peut aussi observer que ce n'est pas quand le coût moyen est minimal que le profit est maximal : quand on augmente la quantité produite, le profit sur chaque unité diminue, mais le profit total augmente quand même, du fait de l'augmentation de la quantité vendue.

Variante sans tableur mais avec support graphique

On peut considérer une situation analogue en donnant la fonction de coût par son expression et sa représentation graphique précise sur quadrillage. Ce peut être une fonction polynôme de degré 3, à condition qu'elle soit positive et croissante sur $[0 ; +\infty[$. Cela suppose de choisir les coefficients (ainsi que le prix de vente) de façon que les points importants aient des coordonnées lisibles.

Variante sans tableur ni support graphique (terminale)

En terminale, on peut utiliser une fonction exponentielle $f(q) = C_0e^{aq}$ avec $a > 0$. Le coût moyen minimal, atteint quand $q = \frac{1}{a}$, vaut aC_0e. le prix de vente unitaire p doit être supérieur à cette valeur pour que l'entreprise puisse espérer la rentabilité. Le résultat d'exploitation s'écrit $h(q) = pq - C_0e^{aq}$. L'intervalle de rentabilité peut être obtenu graphiquement ou par tabulation. Le profit maximal est atteint quand $q = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{p}{aC_0}\right)$.

On peut aussi envisager une fonction de la forme $f(q) = q^3 + b$. Le coût moyen minimal est obtenu quand $q = \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$: cela permet de réinvestir l'exposant $\frac{1}{3}$. Ce coût moyen minimal est égal à $3\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$: le prix de vente unitaire p doit être supérieur à cette valeur pour que l'entreprise puisse espérer la rentabilité. Le résultat d'exploitation s'écrit $h(g) = -q^3 + pq - b$. Les variations de h ne posent pas de problème. Quant à son signe, on peut soit choisir des coefficients qui permettent une factorisation simple, soit se contenter comme ci-dessus d'une exploration numérique et/ou graphique. Si on cherche une fonction concave, une fonction logarithmique $f(q) = a\ln(q + b) + c$ peut faire l'affaire. Pour que f soit positive et croissante sur $[0 ; +\infty[$, il faut $a > 0$, $b > 0$ et $a\ln(b) + c > 0$. La fonction coût moyen est décroissante mais n'a pas de minimum. La fonction h est croissante mais non majorée. Le seuil de rentabilité peut être déterminé sur tableur ou calculatrice, graphiquement ou numériquement.

Cas d'un monopole (terminale)

On considère une entreprise seule sur un marché pour fabriquer et vendre un produit.
Pour fixer son prix de vente unitaire, elle dispose des informations suivantes :
– la fonction de demande d de ce produit : $q = d(p)$, d étant positive et décroissante ;
– la fonction de coût total $f : C = f(q)$, f étant positive et croissante.
On donne les fonctions d et f, et on demande :
– d'exprimer en fonction du prix de vente p le chiffre d'affaires et le coût total de production ;
– d'en déduire le résultat d'exploitation $h(p)$;
– de déterminer les prix de vente p qui permettent un profit ;
– de déterminer le prix de vente qui permet le profit maximal et la quantité à produire.

Exemple

Une entreprise est seule sur le marché pour fabriquer et vendre un certain produit.
Pour fixer son prix de vente unitaire, elle dispose des informations suivantes :
– pour un prix p de la tonne (en euros), la demande mensuelle de son produit (en tonnes) est $d(p) = \frac{36\,000\,000}{p^2}$;
– pour produire mensuellement une quantité q (en tonnes), le coût total de production (en euros) est $f(q) = 12q + 720\,000$.

Revenu, consommation, épargne

On se place ici du point de vue macroéconomique, c'est-à-dire qu'on considère un ensemble important comme un pays ou une catégorie socioprofessionnelle. Pour un type de produit donné, sa « consommation globale » dépend (entre autres) de son revenu global : $C = f(R)$. Considérons un revenu donné R, et supposons qu'il subisse une variation absolue $R_1 - R = \Delta R$. Quelle variation absolue $\Delta C = C_1 - C$ peut-on en déduire ?

Si par exemple : $\Delta C = 0{,}8\Delta R$, cela signifie que 80 % du revenu supplémentaire est affecté à la consommation : on dit que 0,8 est la propension marginale à consommer.

f			
$+\Delta R$	Revenu	Consommation	$+\Delta C$
	R	C	
	R_1	C_1	

Autrement dit, on appelle propension marginale à consommer le nombre $\frac{\Delta C}{\Delta R} = \frac{C_1 - C}{R_1 - R} = \frac{f(R_1) - f(R)}{R_1 - R}$.

Ce nombre dépend *a priori* de R et de R_1. Mais, R étant fixé, si R_1 est suffisamment proche de R, la propension marginale ne dépend pratiquement pas de R_1.

En effet, sur la courbe qui représente f, appelons M et M_1 les points de coordonnées (R, C) et (R_1, C_1). Le nombre $\frac{f(R_1) - f(R)}{R_1 - R}$ est le coefficient directeur de la droite (MM_1). Si R_1 est suffisamment proche de R, on peut assimiler la courbe à sa tangente et donc le nombre au nombre dérivé $f'(R)$.

Cela conduit à définir « la propension marginale à consommer » comme le nombre dérivé $c = f'(R)$.

Nécessairement, $-1 \leq c \leq 1$. En effet $|\Delta C| \leq |\Delta R|$, donc $|f'(R)| \leq 1$.

Les économistes distinguent les biens normaux ou supérieurs, pour lesquels c est positif (leur consommation augmente quand le revenu augmente), et les biens inférieurs, pour lesquels c est négatif (leur consommation diminue quand le revenu augmente).

On peut de la même façon étudier « l'épargne globale » $S = g(R)$: la « propension marginale à épargner » s est le nombre dérivé $g'(R)$.

Or, par définition, l'épargne est la part du revenu qui n'est pas consommée : $S = R - C$.

On en déduit que, pour tout R, $g(R) = R - f(R)$. Par suite $g'(R) = 1 - f'(R)$.

Donc $s = 1 - c$.

La macroéconomie fait l'hypothèse que c et s sont constantes sur le moyen terme (ordre de grandeur : cinq ans). Si l'on se représente f sur le long terme (ordre de grandeur : cent ans), cette hypothèse revient à assimiler localement la courbe de f à sa tangente.

Exemple

On peut donner les définitions ci-dessus et faire retrouver la propriété $s = 1 - c$.

On peut aussi donner la fonction f, et faire calculer c et s.

Il faut veiller alors à ce que f soit positive sur $[0 ; +\infty[$ et vérifie $|f'(R)| \leq 1$ pour tout R.

Élasticité

Élasticité consommation / revenu

Dans ce qui précède, pour étudier l'influence d'une variation du revenu sur la consommation, les variations absolues ont été comparées. On peut procéder une étude analogue avec les variations relatives.

Considérons un revenu donné R, et supposons qu'il subisse une variation relative $\frac{\Delta R}{R}$.

Quelle variation relative $\frac{\Delta C}{C}$ peut-on en déduire pour la consommation ?

Si par exemple $\frac{\Delta C}{C} = 2\frac{\Delta R}{R}$, cela signifie qu'une augmentation de 1,5 % du revenu entraîne une augmentation de 3 % de la consommation ; qu'une diminution de 1 % du revenu entraîne une diminution de 2 % de la consommation : on dit que 2 est l'élasticité de la consommation par rapport au revenu.

f			
$\frac{\Delta R}{R}$	Revenu	Consommation	$\frac{\Delta C}{C}$
	R	C	
	R_1	C_1	

Autrement dit, on appelle élasticité le nombre $\dfrac{\dfrac{C_1 - C}{C}}{\dfrac{R_1 - R}{R}} = \dfrac{C_1 - C}{R_1 - R} \times \dfrac{R}{C} = \dfrac{f(R_1) - f(R)}{R_1 - R} \times \dfrac{R}{f(R)}$.

Ce nombre dépend *a priori* de R et de R_1. Mais, R étant fixé, si R_1 est suffisamment proche de R, l'élasticité ne dépend pratiquement pas de R_1.
En effet, comme on l'a vu au paragraphe précédent, on peut alors assimiler le nombre $\dfrac{f(R_1) - f(R)}{R_1 - R}$ au nombre dérivé $f'(R)$.
Cela conduit à définir l'élasticité de f en R par la formule : $e(R) = \dfrac{Rf'(R)}{f(R)}$.

Cette notion d'élasticité a un grand intérêt théorique et pratique. Elle permet notamment de réaliser des prévisions macroéconomiques. Par exemple, pour la France actuelle, l'INSEE l'évalue à 0,4 pour l'alimentation, à 0,7 pour le logement, 1,5 pour les transports et télécommunications. Cela implique qu'avec un taux de croissance du PIB de 2 %, on peut s'attendre à une augmentation de 0,8 % des dépenses d'alimentation, de 1,4 % des dépenses de logement, de 3 % pour les transports et télécommunications…

Élasticité consommation/prix

On peut de la même façon étudier l'influence du prix d'un produit sur sa consommation. L'élasticité de la consommation par rapport au prix est négative (sauf pour certains biens de luxe pour lesquels le snobisme peut jouer). L'INSEE l'évalue régulièrement pour certaines catégories de produits, car elle aussi est très utile pour la politique économique : si elle est forte, une augmentation du prix réduit fortement la consommation ; si elle est faible (cas des carburants par exemple) une augmentation du prix se répercute peu sur les quantités vendues.

Cas général

On peut parler d'élasticité dans tous les cas lorsqu'une grandeur dépend d'une autre. Et donc en mathématiques, associer à toute fonction dérivable f une fonction « élasticité de f » définie par $\mathrm{E}f(x) = \dfrac{xf'(x)}{f(x)}$.
Une fonction de la forme $x \mapsto ax^b$ a une élasticité constante b. On démontre facilement que les seules fonctions à élasticité constante sont les fonctions de cette forme. Cela explique leur rôle privilégié dans certains modèles (fonctions de production de Cobb-Douglas par exemple).

Pistes d'activités

Fonctions puissances d'exposants non entiers
Leur connaissance n'est pas exigible en STG. Mais elles peuvent faire l'objet d'un problème : la formule $x^b = e^{b\ln(x)}$ permet de découvrir que la formule de dérivation valable pour les exposants entiers s'étend aux exposants non entiers. On peut notamment s'intéresser au cas $b = \dfrac{1}{2}$.

Élasticité d'une fonction puissance
On peut exploiter les exposants 2, 3, –1, $\dfrac{1}{2}$. En faisant découvrir que les fonctions « carré », « cube », « inverse », « racine carrée » ont respectivement pour élasticités 2, 3, –1, $\dfrac{1}{2}$, on donne un nouvel éclairage aux formules d'approximation concernant les petits taux d'évolution :
– si une quantité augmente de 1 %, son carré augmente sensiblement de 2 % ;
– si une quantité augmente de 1 %, son cube augmente sensiblement de 3 % ;
– si une quantité augmente de 1 %, son inverse diminue sensiblement de 1 % ;
– si une quantité augmente de 1 %, sa racine carrée augmente sensiblement de 0,5 %.

Élasticité d'une fonction affine
Comme on l'a indiqué plus haut, la macro-économie privilégie les modèles affines.
Si $f(x) = ax + b$, alors $\mathrm{E}f(x) = \dfrac{ax}{ax + b}$.

Si l'on veut étudier avec un tel modèle l'élasticité consommation/revenu (il faut $0 < a < 1$ et $b > 0$), on peut faire observer que cette élasticité n'est pas la même pour un revenu global de 2 milliards d'euros ou pour un revenu global de 5 milliards d'euros : une variation de 1 % du revenu global n'a donc pas le même effet sur la consommation globale dans les deux cas. Pour comparer les deux situations, on peut proposer aux élèves soit un calcul direct, soit l'utilisation de la propension marginale (constante ici), soit celle de l'élasticité.

Temps de doublement

Considérons une quantité qui évolue à un taux d'évolution annuel t constant.
Il est classique de proposer le calcul du temps nécessaire à son doublement (en années) : $n = \dfrac{\ln(2)}{\ln(1+t)}$.
Or, le nombre dérivé de la fonction ln en 1 est égal à 1. On peut en déduire, à partir de l'observation de la tangente, que si t est petit, $\ln(1 + t)$ est peu différent de t.
Par suite une valeur approchée de n est $\dfrac{0,7}{t}$. Si $t = T$ %, cette formule s'écrit $n \approx \dfrac{70}{T}$.
Cela permet d'évaluer mentalement l'ordre de grandeur de n. Ainsi, une quantité qui augmente de 1 % par an double en 70 ans ; une quantité qui augmente de 2 % par an double en 35 ans ; une quantité qui augmente de 5 % par an double en 14 ans.
Il faut, bien entendu, souligner, en comparant valeur exacte et valeur approchée, que l'approximation est d'autant meilleure que t est petit devant 1 : elle ne serait pas valable par exemple si t était égal à 50 % ou à 100 %.
Cette formule peut être rapprochée des formules d'approximation concernant les petits taux d'évolution, mentionnées dans le programme sous la rubrique « information chiffrée ». Comme elles, elle établit un lien entre la partie « information chiffrée » et la partie « fonctions » et permet de donner du sens au nombre dérivé en 1 d'une fonction de référence, en l'occurrence la fonction ln.

Musique, logarithmes et exposants fractionnaires

Dans la gamme chromatique tempérée (qui correspond à toutes les touches blanches ou noires du piano), les demi-tons sont égaux, c'est-à-dire que pour passer d'une note à la suivante, on multiplie la fréquence par une constante k.
Sachant que monter d'une octave (12 demi-tons) revient à multiplier la fréquence par 2, on est conduit pour déterminer k à résoudre l'équation $2^k = 12$. On en déduit $k = 21/12 \approx 1,06$.
On peut traduire ce résultat en disant que monter d'un demi-ton revient à augmenter la fréquence de 6 %.
On peut faire calculer (éventuellement au tableur) les fréquences de toutes les touches du piano à partir de la fréquence de référence : celle du la_3, égale à 440 Hz.
Bien sûr, on observe que la suite des fréquences est géométrique.
Les logarithmes interviennent dans un autre domaine de l'acoustique : la mesure de l'intensité sonore en décibels.

Fonction logarithme décimal

La fonction logarithme décimal n'est pas exigible en STG, mais elle peut donner lieu à une activité.
La première table de logarithmes décimaux a été proposée en 1617 par Briggs, disciple de Neper, comme une amélioration de la découverte de son maître. Plus commode pour les calculs numériques, les logarithmes décimaux ont été extrêmement utilisés jusqu'à l'apparition des calculatrices à la fin des années 1960.
Il en subsiste quelques usages en physique : pH d'une solution, magnitude d'une étoile, mesure en savarts de la hauteur d'un son, mesure en décibels de l'intensité d'un son…
L'idée de départ est simple : en remplaçant les logarithmes népériens par des valeurs proportionnelles, on conserve la propriété fondamentale de transformer les produits en sommes. En choisissant convenablement le coefficient de proportionnalité, on peut obtenir que le logarithme de 10 soit égal à 1, et donc que celui de 10^n soit n.

Sur cette idée, la construction d'une activité est possible :
– on fait vérifier que toute fonction f de la forme $f(x) = k\ \ln(x)$ transforme la multiplication en addition, la division en soustraction, l'élévation à la puissance n en multiplication par n ;
– on cherche k pour que $f(10) = 1$. On est conduit ainsi à poser $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$;
– on vérifie alors que $\log(10^n) = n$, et que la fonction log est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ (il n'est d'ailleurs pas nécessaire de la dériver pour le démontrer) ;
– on peut constater à la calculatrice, puis expliquer, que si des nombres décimaux s'écrivent avec les mêmes chiffres significatifs, leurs logarithmes décimaux diffèrent d'un entier ;
– on peut aussi observer que l'encadrement $10^{n-1} \leq x < 10^n$ équivaut à l'encadrement $n-1 \leq \log(x) < n$. Cela permet par exemple de trouver le nombre de chiffres de l'écriture décimale de 210 000.
On démontre que les seules fonctions définies et dérivables sur $]0 ; +\infty[$ qui transforment les produits en sommes sont les fonctions de la forme $x \mapsto k\ln(x)$.
Si a est un réel strictement positif différent de 1, la fonction logarithme de base a, définie par $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$, est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base a.
La fonction logarithme de base 2 est notamment utilisée en théorie de l'information.

Ajustement exponentiel

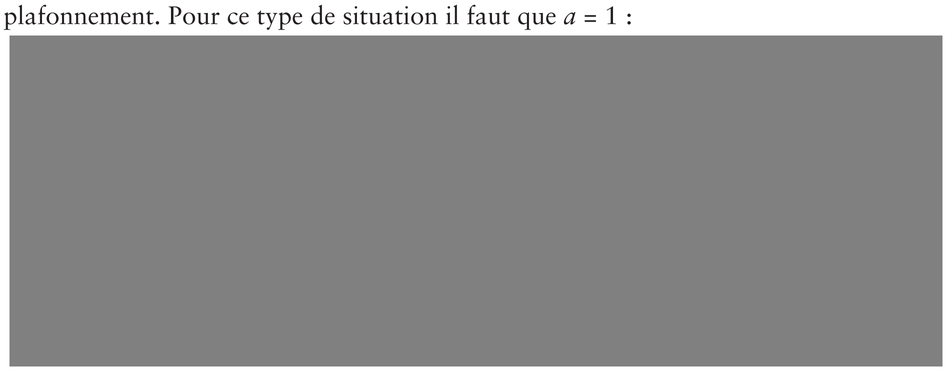
En fin de terminale, l'ajustement exponentiel permet une synthèse entre les trois parties du programme : information chiffrée, statistiques, fonctions.
On peut partir de données statistiques, par exemple pour tester une loi empirique comme celle de Moore : selon Gordon Moore, PDG de la société Intel (premier fabricant de microprocesseurs), la puissance des ordinateurs double environ tous les dix-huit mois (cette puissance peut par exemple être mesurée par le nombre de transistors d'un microprocesseur).
On peut chercher le taux d'augmentation annuel correspondant : l'équation $(1+t)^{\frac{3}{2}} = 2$ conduit à $(1+t) = 2^{\frac{2}{3}}$. On peut donc rechercher une fonction de la forme $x \mapsto a2^{\frac{2}{3}x}$ pour ajuster le nuage de points observé.

Fonctions logistiques

Ce sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{a}{1+be^{-kx}}$ avec a, b, k positifs.

Une telle fonction est positive et croissante sur $]-\infty ; +\infty[$ avec pour limites 0 en $-\infty$ et a en $+\infty$.
Son graphe a une forme en « S », avec un point d'inflexion en $\left(\frac{\ln(b)}{k} ; \frac{a}{2}\right)$.

Ces fonctions sont utilisées pour modéliser certaines évolutions temporelles.
Par exemple, l'évolution du taux d'équipement des ménages pour un bien durable est caractérisée par un démarrage lent, une accélération puis un ralentissement et un plafonnement. Pour ce type de situation il faut que $a = 1$:



La notion de limite n'est pas au programme. Mais on peut faire démontrer que pour x positif, $f(x)$ reste toujours compris entre $\frac{a}{1+b}$ et a. On peut aussi faire calculer la date à partir de laquelle $f(x)$ dépasse une valeur donnée strictement inférieure à a.

On peut proposer ce type de fonction comme ajustement d'un nuage de points ayant la forme voulue. Le changement de variable $Y = \ln\left(\frac{a}{y} - 1\right)$ ramène le problème à un ajustement affine de Y en x.

Introduction du nombre dérivé

Deux approches sont possibles.

Pente d'un sentier

La courbe ci-dessous représente le profil d'un sentier de haute montagne, partant d'une vallée O, passant par un col C et arrivant dans la vallée A (arrivée).
En abscisse est indiquée la distance horizontale depuis le point de départ O, en ordonnée l'altitude par rapport à O. L'unité sur chaque axe est le km.
Le point H désigne un hameau, le point R un refuge.

Le guide prétend qu'au hameau H la pente du sentier est 120 % :
– Quelle construction peut-on envisager pour vérifier cette valeur ?
– Évaluer la pente du sentier au refuge.
– Quelle est la pente du sentier au col C ? Au départ O ? À l'arrivée A ?
– Un randonneur, par ailleurs mathématicien, a cherché une fonction f qui s'ajuste à cette courbe. Il a trouvé $f(x) = \frac{x^2(x-4)^2}{10}$. Vérifier sa formule avec les points O, H, C, R, A.
– En admettant que la courbe représente bien la fonction f ci-dessus, on démontre que la pente en un point d'abscisse x vaut $\frac{2x(x-2)(x-4)}{5}$. Vérifier pour les points O, H, C, R, A.
– En utilisant la formule précédente, trouver la pente du sentier au point K d'abscisse 1,5. Tracer la droite tangente à la courbe en ce point.
– Résumer l'étude précédente dans le tableau ci-dessous.

Point	Abscisse	Ordonnée	Pente
O			
H			
C			
R			
A			
K			

– Commentaire : la question 1 veut faire émerger l'idée de tracer la droite qui « colle » au mieux à la courbe, et que le professeur appellera la droite tangente en H. L'étymologie peut être éclairante : en H, la droite tangente « touche » la courbe, (le latin *tangere* a donné « tangible, tactile, contact »), contrairement aux autres droites passant par H qui

sont sécantes, autrement dit « coupent » la courbe (le latin *secare* a donné « sécateur, section, sécable »).
Le quadrillage permet de tracer avec précision la droite de pente 1,2 passant par H, pour constater qu'elle semble bien être la droite cherchée. C'est l'occasion de mettre en place la technique de construction d'une droite connaissant son coefficient directeur et un de ses points.
Le professeur dispose d'une animation *Geoplan*, visible au vidéoprojecteur, qui permet de déplacer le point M d'abscisse x (symbolisant le randonneur) et de faire apparaître la tangente en M.
En exercice on peut déterminer les équations des tangentes tracées.

Approximation affine à l'aide d'un tableur

– Dans un repère orthonormé d'unité 4 cm, faire construire l'arc p de la parabole d'équation $y = x^2$ pour x appartenant à l'intervalle [0 ; 2] et la droite d d'équation $y = 2x - 1$.
Par lecture graphique, faire conjecturer le nombre de solutions de l'équation $x^2 = 2x - 1$ puis faire retrouver algébriquement le résultat précédent.
– Comparaison de x^2 et $2x - 1$ pour x proche de 1. À l'aide d'un tableur, faire déterminer pour x variant de 0,9 à 1,1 avec un pas h (0,005 par exemple) les valeurs de x^2, $2x - 1$ et $x^2 - (2x - 1)$, puis faire constater que l'erreur absolue commise en prenant $2x - 1$ comme valeur approchée de x^2 dans l'intervalle [0,9 ; 1,1] est d'autant plus faible que l'on est proche de 1.
– En tirer les conclusions :
• pour x proche de 1, $2x - 1$ est une approximation affine de x^2 ;
• la droite d'équation $y = 2x - 1$ est la tangente à la courbe d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse 1 ;
• son coefficient directeur 2 est appelé nombre dérivé de f en 1 et on note : $f'(1)=2$.

N.B. – On peut aussi faire calculer l'erreur relative.

– Généralisation : on veut montrer que pour différentes valeurs de a, x^2 est approché par $2ax - a^2$ pour des valeurs proches de a. On peut demander de concevoir une feuille de calcul. La feuille ci-dessous illustre le cas où a et le « pas » peuvent être imposés.

	A	B	C	D	E
1	a =	-3		Pas =	0,1
2	x	x^2	$2ax - a^2$	Erreur absolue	Erreur relative
3	-4	16	15	-1	-6,250%
4	-3,9	15,21	14,4	-0,81	-5,325%
5	-3,8	14,44	13,8	-0,64	-4,432%
6	-3,7	13,69	13,2	-0,49	-3,579%
7	-3,6	12,96	12,6	-0,36	-2,778%
8	-3,5	12,25	12	-0,25	-2,041%
9	-3,4	11,56	11,4	-0,16	-1,384%
10	-3,3	10,89	10,8	-0,09	-0,826%
11	-3,2	10,24	10,2	-0,04	-0,391%
12	-3,1	9,61	9,6	-0,01	-0,104%
13	-3	9	9	0	0,000%
14	-2,9	8,41	8,4	-0,01	-0,119%
15	-2,8	7,84	7,8	-0,04	-0,510%
16	-2,7	7,29	7,2	-0,09	-1,235%
17	-2,6	6,76	6,6	-0,16	-2,367%
18	-2,5	6,25	6	-0,25	-4,000%
19	-2,4	5,76	5,4	-0,36	-6,250%
20	-2,3	5,29	4,8	-0,49	-9,263%
21	-2,2	4,84	4,2	-0,64	-13,223%
22	-2,1	4,41	3,6	-0,81	-18,367%
23	-2	4	3	-1	-25,000%

Sa conception fait appel aux formules suivantes :

a =	-3		Pas =	0,1
x	x^2	$2ax - a^2$	Erreur absolue	Erreur relative
=B1-1	=A3^2	=2*$B$1*A3-$B$1^2	=C3-B3	=D3/B3
=A3+$E$1	=A4^2	=2*$B$1*A4-$B$1^2	=C4-B4	=D4/B4
=A4+$E$1	=A5^2	=2*$B$1*A5-$B$1^2	=C5-B5	=D5/B5
=A5+$E$1	=A6^2	=2*$B$1*A6-$B$1^2	=C6-B6	=D6/B6

– Commentaire : on fera constater que l'approximation est meilleure pour des valeurs proches de – 3 et que – 6 est alors le nombre dérivé de f en – 3.
On change la valeur de a en B1 et on procède aux mêmes constatations.
En conclusion finale, on dit que $2a$ est le nombre dérivé de la fonction « carrée » en a et que $2ax - a^2$ est une approximation affine de x^2 pour des valeurs proches de a.
Pour finir, on peut revenir à l'approche graphique pour montrer que les droites d'équations $y = 2ax - a^2$ sont tangentes aux points d'abscisses a de la courbe en construisant avec un grapheur la parabole d'équation $y = x^2$ et la famille de droites d'équation $y = 2ax - a^2$.

N.B. – Les parties 1 et 2 peuvent être faites en travaux dirigés et la partie 3 en cours à l'aide d'un vidéo-projecteur.

Introduction de la fonction ln (sans calculatrice ni tableur !)

« L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes » (Laplace, 1749-1827).
La fin du XVI[e] siècle est l'époque des grands voyages maritimes et de la découverte des lois régissant le mouvement des planètes (Copernic, Kepler…).
Les mesures astronomiques, nécessaires pour la navigation, impliquaient des calculs compliqués sur de grands nombres.
Les multiplications, divisions et extractions de racines étaient particulièrement longues et pénibles.
Pour simplifier ces calculs, on chercha à construire des « tables numériques à deux colonnes », mettant en correspondance les nombres de telle manière qu'à la multiplication de deux nombres de la colonne de gauche corresponde l'addition de deux nombres de la colonne de droite.

0,1	
0,5	
1	
1,5	
2	0,69315
3	1,09861
4	1,38629
5	1,60944
6	1,79176
7	1,94591
8	2,07944
9	2,19722
10	2,30259
11	2,39790
12	2,48491
13	2,56495
14	2,63906
15	2,70805
16	2,77259
17	2,83321
18	2,89037
19	2,94444
20	2,99573
21	
22	
100	

La première table de ce type fut publiée par l'Écossais John Neper en 1614, après quarante ans de travail ! En voici un extrait (ci-contre).
1. Vérifier sur quelques exemples la propriété annoncée :
– Quel nombre doit-on écrire en face de 1 ?
– Quel nombre doit-on écrire en face de 21 ? de 22 ?
2. Quand on divise deux nombres de la colonne de gauche, que peut-on dire de ceux de la colonne de droite ? En déduire les nombres à écrire en face de : 1,5 ; 0,5 ;0,1.
3. Pour désigner les nombres de la colonne de droite, on inventa le mot « logarithme », forgé à partir des deux mots grecs *logos* (rapport) et *arithmos* (nombre entier naturel) : en effet si les nombres de gauche sont dans un rapport constant (c'est-à-dire en progression géométrique), alors ceux de droite sont à différence constante (c'est-à-dire en progression arithmétique).
4. Vérifier cette propriété en considérant dans la première colonne la suite 1,2,4,8,16.
Quand on élève un nombre au carré, que peut-on dire de son logarithme ?
En déduire le logarithme de 100.
5. Quand on prend la racine carrée d'un nombre, que peut-on dire de son logarithme ?
En déduire le logarithme de $\sqrt{5}$.
Ainsi, cette table remplace les multiplications par des additions, les divisions par des soustractions, les extractions de racine carrée par des divisions par 2.
Un siècle plus tard, la création du calcul différentiel par Newton et Leibniz permit de découvrir qu'en plus de ses propriétés pratiques, la fonction logarithme de Neper avait un intérêt théorique considérable.
On constata notamment qu'elle avait pour dérivée une fonction très simple : la fonction « inverse » ! Mieux : que cette propriété, jointe au fait que l'image de 1 est 0, suffisait à la définir.

Bibliographie

Livres

– ANGELIER J.-P., *Calcul économique et financier*, PUG, 1997. Cet ouvrage est destiné aux étudiants de sciences économiques, aux élèves-ingénieurs, aux candidats à différents concours (DECF, CAPES, fonction publique). Des exemples concrets, de nombreux exercices corrigés, des rappels mathématiques systématiques, permettent au lecteur de se familiariser avec les méthodes usuelles d'aide à la décision.

– ABERLEN J., HAUSSAIRE A. et ZOUHHAD R., *Méthodes quantitatives*, Dunod, 2003. Ce manuel destiné aux candidats au DPECF aborde le programme de mathématiques et d'informatique de l'épreuve 3 de cet examen (analyse, statistique descriptive, mathématiques financières, informatique). Facile d'accès, il contient de nombreuses applications concrètes, toutes corrigées.

– CARNEC H., DAGOURY J.-M., SEROUX R. et THOMAS M., *Itinéraires statistiques et probabilités*, Ellipses, 2000.

– CLERC D., *Dictionnaire des questions économiques et sociales*, l'Atelier, 1997. Un outil de référence pour qui cherche le sens précis des termes économiques et sociaux situés dans leur contexte.

– DEFFAINS-CRAPSKY C., *Mathématiques financières*, Bréal, 2003. Cet ouvrage expose sous forme de fiches les principes mathématiques de base utilisés en finance. Destiné, *a priori*, aux étudiants des premiers et deuxièmes cycles universitaires, il permet une découverte rapide des mathématiques financières et du vocabulaire afférent aux non-spécialistes.

– DOLLO C. et LUISET B., *Des concepts économiques aux outils mathématiques*, Hachette, 1998. Un outil précieux pour comprendre la modélisation mathématique en économie. Destiné aux étudiants de sciences économiques, il précise les hypothèses et définitions, et propose des problèmes corrigés.

– DOWLING E.T., *Mathématiques pour l'économiste, cours et problèmes*, Mac Graw Hill, série Schaum, 1990. Une source inépuisable d'exercices dans un contexte économique, on peut s'en inspirer pour créer des exercices plus simples. Attention toutefois à la traduction approximative, en particulier des termes mathématiques.

– ENGEL A., *Les Certitudes du hasard*, Aléas, 1990. Réédition actualisée de *L'Enseignement des probabilités et des statistiques* paru chez CEDIC en 1975, cet ouvrage présente de façon très pédagogique les notions essentielles de probabilités.

– EWENCZYK S., JAMMES R. et LEVY M.-L., *Comprendre l'information économique et sociale : guide méthodologique*, Hatier, 1981, rééd. 1989. Une présentation des concepts et des méthodes économiques, précise tout en restant simple et pratique.

– FAURE R., LEMAIRE B. et PICOULEAU C., *Précis de recherche opérationnelle*, Dunod, 2000. Ouvrage classique qui présente sous une forme accessible, les méthodes de la recherche opérationnelle, en s'appuyant, sur de très nombreux exemples d'application. Il est question, entre autres, de gestion des stocks, programmation linéaire, processus aléatoires.

– HURIOT J.-M., *Économie, mathématiques et méthodologie*, Économica, 1995. Une réflexion sur l'usage des mathématiques en économie.

– IREM de Besançon, *L'Enseignement des mathématiques en première ES*, 1995. Un travail principalement axé sur l'introduction et l'exploitation du nombre dérivé.

– KLATZMANN J., *Attention statistiques*, La Découverte, 1996. Une mise en garde attrayante contre les pièges de l'interprétation statistique.

– MINCKE M., Excel, *un outil pour résoudre des problèmes au cours de sciences*, De Boeck, 2003. L'ouvrage, accompagné d'un cédérom contenant les exemples développés et des compléments, comprend trois parties. La première présente des méthodes de résolution de problèmes n'exigeant que des connaissances de base du tableur. À partir d'exemples d'applications dans le domaine scientifique, la seconde approfondit les opérateurs logiques et l'usage du solveur, des bases de données et de *Visual Basic*. La troisième porte sur une utilisation plus élaborée du tableur sur des sujets scientifiques variés. Les deux premières parties forment un outil précieux pour appréhender l'usage et les apports potentiels du tableur. Les exemples sont cependant centrés sur le domaine scientifique.

– PIERMAY M., HEREIL O. et LAZIMI A., *Mathématiques financières,* Économica, 1989. Chaque chapitre présente brièvement les définitions, suivi du traitement complet de nombreux cas et exercices. L'utilisation de schémas des flux financiers et des calculatrices financières accompagne la résolution des exercices. C'est un ouvrage moderne, pédagogique et indispensable pour comprendre la finance.

– QUINET E. et DE CALAN P., *Les Mathématiques en économie : apport ou invasion ?*, Éd. universitaires, 1995. Une réflexion sur la place des mathématiques en économie.
– ROBERT C., *Contes et décomptes de la statistique*, Vuibert, 2003. Réédition de *L'Empereur et la Girafe*, un essai de vulgarisation des concepts statistiques fondamentaux, destiné à en montrer les enjeux. Claudine Robert, spécialiste de statistiques, a présidé le GEPS qui a élaboré les programmes actuels de seconde ainsi que de première et terminale S et ES.
– ROSEAUX, *Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle,* Dunod, 1998.
Tome 2 : *Phénomènes aléatoires en recherche opérationnelle*. Des exemples pour la gestion des stocks.
Tome 3 : *Programmation linéaire et extensions*. Des exemples pour la programmation linéaire.
– SCHLACTHER D., *Comprendre la formulation mathématique en économie*, Hachette, 2000. Un petit ouvrage à l'intention des étudiants en économie, présentant de façon simple les notions mathématiques utiles. Intéressant car la présentation de ces notions n'est pas toujours la présentation classique en mathématiques.
– SCHWARTZ D., *Le Jeu de la science et du hasard, la statistique et le vivant*, Flammarion, 2000. Un ouvrage facile à lire, exposant quelques enjeux des statistiques en biologie.
– SPIEGEL M.-R., *Théorie et applications de la statistique*, Mc-Graw-Hill, 1993. Une référence en matière de statistiques appliquées. Un cours réduit au minimum, mais de très nombreux exercices, dont certains résolus.
– THIÉNARD J.-C. et al, *Mathématiques première ES et terminale ES*, Bréal, 2002. Dans ce manuel destiné à la filière ES, chaque chapitre est complété par une rubrique établissant un pont entre mathématiques et économie, comprenant pour chaque notion économique une brève présentation et quelques exercices.
– WONNACOTT T.H. et WONNACOTT R.J., *Statistique, économie, gestion, sciences et médecine*, Économica, 1998. Cet ouvrage est un ouvrage de référence dans de nombreux pays. Il présente la statistique descriptive et l'ensemble des méthodes de la statistique inductive : estimation, tests, méthodes bayésiennes, analyse de la variance, corrélation et régression, modèles… Cette présentation est illustrée par de nombreux exemples tirés de domaines très divers.

Brochures

– APMEP, *Mathématiques dans les métiers du secteur tertiaire* (brochure n° 91), 1993. Une sélection d'épreuves de CAP, BEP et bac pro tertiaires: le niveau est inférieur à celui de STG, mais les sujets peuvent suggérer des exercices de remise à niveau.
– Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (commission Kahane), *Rapport d'étape sur les statistiques*, 2003. Une réflexion approfondie sur les enjeux de la formation en statistique.
– Commission inter-IREM lycées technologiques, *Simulation d'expériences aléatoires*, IREM de Paris-Nord (brochure n° 93), 1999. Une expérimentation du hasard, de la première au BTS, sur calculatrice et ordinateur.
Simulation et Statistique en seconde, IREM de Paris-Nord (brochure n° 102), 2000. Centrée sur le programme de statistique de Seconde, cette brochure propose des compléments de probabilités et statistique inférentielle, des TP sur calculatrice et sur tableur, ainsi que des évaluations corrigées. Elle est accompagnée d'un cédérom.
Enseigner les statistiques au lycée : des enjeux aux méthodes, IREM de Paris-Nord (brochure n° 112), 2001. Un exposé, à partir d'exemples, de la pertinence de la méthode statistique. Des annexes fournissent diverses pistes d'activités pédagogiques.
– Commission inter-IREM statistiques et probabilités, *Enseigner les probabilités au lycée*, IREM de Reims, 1997 et 2003. Une réflexion très riche, à la fois historique, épistémologique et didactique, qui propose en outre des idées d'activités.
Autour de la modélisation en probabilités, Presses universitaires franc-comtoises, 2001. Une réflexion historique, épistémologique et didactique sur la modélisation en probabilités, et des pistes d'activité en classe.
– GASQUET S. et CHUZEVILLE R., *Les Mathématiques dans l'information chiffrée*, CRDP de Grenoble, 1993. Une réflexion sur l'information chiffrée, illustrée d'exemples d'activités.
– GASQUET S., *Les Chiffres et l'Élève*, CRDP de Grenoble, 1994. Un travail conçu initialement pour la première ES, mais utilisable en STG.
– GASQUET S. et CHUZEVILLE R., *Fenêtres sur courbes*, CRDP de Grenoble, 1994. Une approche des fonctions fondée sur l'observation et la pratique des graphiques.
– HENRY M., *L'Enseignement des probabilités*, Presses universitaires franc-comtoises, 1999. Une réflexion historique, épistémologique et didactique.
– IREM de Bourgogne, *Modèles mathématiques pour les sciences économiques et sociales au lycée*, 1998. À partir de thèmes économiques, cette brochure propose des activités mathématiques. Conçue pour la filière ES, elle peut rendre service en STG.
– IREM de Lorraine, *Dé-chiffrer par les maths*, APMEP (brochure n° 147), 2002. Conçu pour les élèves de première L, cette brochure est une mine d'idées pour traiter l'information chiffrée et les statistiques.
L'Enseignement des probabilités au collège et au lycée : exemples européens et propositions, 2001.

Après un tour d'horizon des programmes de quelques pays européens et une analyse des représentations que les élèves se font du hasard, les auteurs proposent quelques pistes pour un renouvellement de l'enseignement de l'aléatoire au collège et au lycée.
– IREM de Lyon, *36 élèves, 36 calculatrices*, cédérom. Un outil pratique pour gérer l'hétérogénéité des modèles de calculatrices. Pour chaque modèle et chaque domaine d'utilisation (calculs, fonctions, statistiques), on peut imprimer une fiche traitant un exemple où l'élève est guidé.
– IREM de Montpellier, *Des statistiques à la pensée statistique*, 2001. Réflexion épistémologique et historique, présentation des programmes et analyse didactique, idées d'activités pour la classe.
– IREM de Paris-Nord, *Statistique et probabilité au lycée – Carnets de stage* (brochure n° 124), 2003,
– IREM de Poitiers, *Mathématiques en filière économique et sociale*, 1996. Réflexion didactique, propositions d'activités : conçue pour la filière ES, cette brochure peut rendre service en STG.
Thèmes pour l'enseignement des statistiques et des probabilités, 1994. Une réflexion sur les implications sociales des statistiques et des probabilités, débouchant sur des activités pour les élèves.
– IREM de Rennes, *Mathématiques et économie*, 1998. Sur de nombreux exemples, un travail d'harmonisation entre les deux disciplines.
– IREM de Strasbourg, *Mathématiques et sciences économiques et sociales au lycée*, 1996. Une information sur les liens entre les deux disciplines, une réflexion sur quelques thèmes comme la modélisation ; les textes des programmes ; des exercices, activités et travaux pratiques. Conçue pour la filière ES, cette brochure peut rendre service en STG.
– THIÉNARD J-C, *À propos de l'enseignement du calcul des probabilités*, IREM de Poitiers, 1993. Une réflexion approfondie sur l'enseignement des probabilités au lycée, pour lequel l'auteur préconise l'emploi systématique des urnes de Bernoulli.

Revues

– « Web : l'essentiel des statistiques », *Alternatives économiques*, hors-série n° 58, 4e trimestre 2003.
– « Les mathématiques sociales », *Pour la science*, hors-série n° 24, juillet 1999.
– « Spécial probabilités », *Repères-IREM*, n° 32, juillet 1998.
– « Spécial probabilités », *Tangente*, n° 47, décembre 1995.
– « L'économie malade des mathématiques », *Tangente*, n° 78, décembre 2000.

Articles

– BONNEVAL L.-M., « Mathématiques et économie : je t'aime, moi non plus », *Repères-IREM*, n° 52, juillet 2003.
– EKELAND I., « Économie et mathématiques », in *Université de tous les savoirs, Les Mathématiques*, Odile Jacob, 2000.
« Le décryptage de l'économie », *Pour la science*, n° 300, octobre 2002.
– HEBERT J.-P., « Mathématiques, économie et citoyens », *Bulletin APMEP*, n° 424, septembre 1999.
– HENRY M., « L'enseignement du calcul des probabilités dans le second degré », *Repères-IREM*, n° 14, janvier 1994.
– IREM de Strasbourg, « Économie et mathématiques : quelques éléments du débat », *Repères-IREM*, n° 36, juillet 1999.
– VERDIER J., « Deux ou trois petites choses que je sais de la médiane », *Bulletin APMEP*, n° 430, septembre-octobre 2000.
– ZERNER M., « Les sujets de maths du baccalauréat ES : le jour du bac, tu fais le con », *Repères-IREM*, n° 36, juillet 1999.

Sites Internet

www.educnet.education.fr/math
www.apmep.asso.fr
www.univ-irem.fr
www.cfem.asso.fr
www.sesamath.net/portail
publimath.irem.univ-mrs.fr
www.dma.ens.fr/culturemath
www.aromath.net
www.animath.fr

Quelques ressources statistiques :
www.insee.fr
www.alternatives-economiques.fr
www.ladocumentationfrancaise.fr

~~Imprimé sur les presses de Desmet-Laire, 19, rue des Résistants, 7750 Mont-de-l'Enclus, Belgique~~
~~Dépôt légal : novembre 2001~~